رواد التميز

المناهج الدراسية السودانية

المرحلة الثانوية

الصف الثالث ثانوي

الرياضيات المتخصصة

[الكتاب الثاني]

الصف الثالث ثانوي

جمهورية السودان

وزارة التعليم العام

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

التعليم الثانوي

الرياضيات المتخصصة

الكتاب الثاني

$$د(س) = \sqrt{س + ٢ص + ٤}$$

الصف الثالث

بسم الله الرحمن الرحيم

جمهورية السودان

وزارة التعليم العام

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

الرياضيات

(الكتاب الثاني)

للصف الثالث الثانوي

إعداد: لجنة بتكليف من المركز القومي للمناهج والبحث التربوي من الأساتذة:

الدكتور: عبد الغنى إبراهيم محمد – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

الأستاذ : علي محمد الجاك – المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

الدكتور: محسن حسن عبد الله هاشم – **جامعة الخرطوم– كلية العلوم الرياضية**

الأستاذ : محمد الحسن طه محمد – جامعة أم درمان الإسلامية

مراجعة :

الأستاذ : عبد السلام الشريف – مدير إدارة التدريب بوزارة التربية

الأستاذ : حسن عبد الغفور حسن – مدير إدارة التقويم التربوي بوزارة التربية

شارك في التنقيح : الدكتور : عبد الله محمود عبد المجيد – المركز القومي للمناهج

الأستاذ : عز الدين عثمان آدم – التوجيه الفني – ولاية الخرطوم

الإخراج الفني والتصميم : إبراهيم الفاضل الطاهر – المركز القومي للمناهج

تصميم الغلاف :مجدي محجوب فتح الرحمن– **المركز القومي للمناهج والبحث التربوي**

الجمع بالحاسوب : إشراقة فرح شريف – المركز القومي للمناهج

: **رقية الريح محمد إسماعيل** – المركز القومي للمناهج

: عبد القادر موسى محمد – المركز القومي للمناهج

ISBN 978-99942-53-17-3 ردمك

المحتويـــات

المقــدمــــــــة

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات ، والصلاة والسلام على اشرف خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وعلى آله واصحابه اجمعين .

أما بعد .

فاستكمالاً لمناهج المرحلة الثانوية ، يسعدنا أن نقدم لأبنائنا الطلاب كتاب الرياضيات المتخصصة للصف الثالث الثانوي– الكتاب الثاني– في إطار خطة التطوير التربوي للتعليم الثانوى من جانب ، وتمشياً مع التطور الكبير الذى حدث في محتوى مادة الرياضيات في النصف الأخير من القرن العشرين من جانب آخر ، هذا التطور الذى شمل طريقة عرضها وأسلوبها ولغتها. ولم تتح الفرصة لمناهج المرحلة الثانوية في السودان لمواكبته طوال الفترة الماضية ، لذا حاولنا أن يكون منهج الرياضيات بالسودان مواكباً لذلك التطور . ويشمل هذا المقرر المفاهيم التى تستكمل البناء الرأسى للمحتوى المعرفى الذى يجب أن يلم به الطالب وهو على أعتاب مرحلة التعليم العالى و ممارسة الحياة العملية والمشاركة الفاعلة في المجتمع .

لقد تم إعداد هذا الكتاب ليشمل التفاضل والتكامل آخذين في الأعتبار أن يشمل كل المفاهيم التى يحتاجها الطالب لمواصلة دراسته في الكليات العلمية مثل : تفاضل وتكامل الدوال المثلثية وتطبيقات التفاضل والتكامل كالنهايات العظمى والصغرى والمساحات . بجانب اشتماله على معادلة الدائرة ومجموعة الأعداد المركبة .

لقد عرضت مادة الكتاب ؛ من خلال دروس تحوى كل منها فكرة واحدة، ويتوافر بكل درس عدد مناسب من الأمثلة والمسائل لتعميق التدريب في الصف ، أو تعطى على شكل واجب منزلى . وقد توخينا في هذا الكتاب ربط موضوعاته بموضوعات كتب الرياضيات للصفوف السابقة مع الاهتمام بالبرهان الرياضى للحقائق العلمية ومراعاة التوازن بين المفاهيم والمهارات آملين أن نكون قد وفقنا في ذلك كله مرحبين بكل نقد بناء من الموجهين والمعلمين والطلاب واولياء الامور لإثراء الكتاب وتطويره .

والله الموفق

المؤلفون

الوحدة الأولى

Δس

الدوال الحقيقية والنهايات

أهداف الوحدة الأولى

بعد دارسة هذه الوحدة نتوقع أن يكون الطالب قادراً على أن :-

١- يميّز الدالة العددية ويجد صورة العنصر بالتعويض .

٢- يجد مجال التعريف للدالة العددية .

٣- يجد قاعدة الدالة الناتجة من تركيب دالتين .

٤- يتعرّف مفهوم نهاية الدالة .

٥- يتعرّف المقادير غير المعينة في النهايات وطرق حلها .

٦- يجد نهاية الدالة كثيرة الحدود والدالة الكسرية التي كل من بسطها ومقامها كثيرة حدود .

٧- يجد نهاية الدالة التي على الصورة $\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}}$ عندما س $\longleftarrow$ أ .

٨- يجد نهاية الدوال جاس ، جتاس ، ظاس ، $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ وذلك عندما س $\longleftarrow$ ٠ .

٩- يميّز بين الدوال المتصلة والغير متصلة عند فترة أو نقطة .

تمهيـد لحساب التفاضل والتكامل (الحسبان)

أطلق الرياضيون على حساب التفاضل والتكامل (الحسبان) ، وهو علم دراسة التغيرات والحركة ، ويدخل في دراسة الكثير من الظواهر الطبيعية والاقتصادية والاجتماعية والنفسية . وله دور عظيم في تطوير الفيزياء والعلوم الهندسية ، كما يدخل في بناء النماذج الرياضية وفي مجالات شتى مثل إدارة الأعمال والطب والأحياء وحتى العلوم السياسية . لذلك يعتبر التفاضل والتكامل محور الرياضيات الأولية بسبب أفكاره وأساليبه وتطبيقاته .

ولم تظهر فكرة التفاضل والتكامل حديثاً – في القرن السابع عشر كما يعتقد معظم الرياضيين لكنها ظهرت قبل الميلاد عندما استخدم الاغريق فكرة التكامل عند ايجادهم للمساحة المحددة بمنحنيات .

ويقال أن ثابت بن قرة (٨٢٦ – ٩٠١) م – وهو من علماء المسلمين – وضع أساس علم التفاضل . فقد تمكن من إيجاد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره .

ولم يكن التفاضل والتكامل في ذلك الوقت علماً منفصلاً بذاته بل كان جزءاً من علم الجبر إلى أن جاء كل من العالم الانجليزى اسحق نيوتن (١٦٤٢ – ١٧٢٧) م والفيلسوف الألمانى جوتفرد ليبتنز (١٦٤٦ – ١٧١٦) م واكتشف كل منهما مستقلاً عن الأخر علم التفاضل والتكامل . وكان هذا الاكتشاف بداية لعصر جديد في العلوم والرياضيات .

وكتب ليبتنز أول كتاب في هذا العلم عام ١٦٨٤م ونشر عام ١٦٩٣م . كما قام نفس العالم بنشر مقالات عن الحساب المجموعى ثم عدل العنوان في عام ١٦٩٦م إلى حساب التفاضل . وهو الذى وضع الرموز المختلفة لهذا العلم مثل : د (س) ، د س ، $\int$.

أما إسحق نيوتن فقد توصل إلى حساب التفاضل والتكامل في بحثه عن حلول لمسائل في الفيزياء والفلك . وقد تمكن من استخدامه في وصف حركة الكواكب حول الشمس .

وقد أثبت علم التفاضل والتكامل وعلم الهندسة التحليلية أنهما وسيلتان لهما قوة مذهلة وقدرة فائقة على حل حشد كبير من المسائل والمشكلات التى كانت محيرة وتبدو غير قابلة للحل في ذلك الوقت .

ونسبة لهذه الخصائص المميزة لعلم التفاضل والتكامل ، فقد جذب إليه الكثير من الرياضيين والباحثين ، مثل العالم الالمانى اويلر (١٧٠٧ – ١٧٨٣) م ، الذى بحث في كل ميادين الرياضيات الموجودة في عصره وركز في أبحاثه على التفاضل والتكامل حيث قدم التفاضل الجزئى وحساب التغيير وتطبيقاتها . أما العالم لويس لاجرانج (١٧٣٦ – ١٨١٣) م فقد ساهم في تطوير جميع فروع الرياضيات بالإضافة إلى تطويره لحساب التفاضل والتكامل .

وشهد القرن التاسع عشر تقدماً عظيماً في التحليل الرياضى (التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية) ، ففى عام ١٨٢١م اكتشف العالم كوشى (١٧٨٩ – ١٨٥٧) م نظرية النهايات ، وعرف بعض المفاهيم الأساسية مثل التقارب والتباعد والتكامل المحدد باستخدام النهايات .

أما العالم الالمانى ريمان (١٨٢٦ – ١٨٦٦) م فقد اكتشف التكامل الريمانى .

ويتميز القرن العشرين بانطلاقة واسعة في مجال التطبيق العملى لمعظم فروع الرياضيات – رغم طبيعتها التجريدية – ومن بينها الحسبان الذي قال عنه الرياضى المشهور جون طون نيومان (١٩٠٣ – ١٩٥٧) م " الحسبان هو أول انجاز في الرياضيات الحديثة " .

ونبدأ دراستنا للحسبان بتعرّف الدوال الحقيقية والنهايات لصلتها الوثيقة بحساب التفاضل والتكامل ونتعرض بشئ من التفصيل لمفهوم التفاضل وقواعده الأساسية وتطبيقاته ، ومن ثم نتناول مفهوم التكامل كعملية عكسية للتفاضل ونختتم دراستنا للحسبان التى تشمل الفصول الخمسة الأولى من هذا الكتاب بتعرّف التكامل المحدد وتطبيقاته .

(١) الدوال الحقيقية و النهايات

(١ – ١) التطبيق (الدالة) :

درسنا في مقرر الصف الأول ، وبشئ من التفصيل التطبيقات (الدوال).
تعرف الدالة على أنها علاقة من مجموعة غير خالية سـ إلى مجموعة غير خالية صـ يقترن فيها كل عنصر في سـ بعنصر واحد فقط من صـ.
وإذا رمزنا للدالة بالرمز د فإننا نعبر عن ذلك عادة بـــ :

$$\boxed{\text{د : سـ} \rightarrow \text{صـ}}$$

سـ تسمى مجال الدالة د و صـ المجال المصاحب للدالة

أو : ص = د (س) ، س $\in$ سـ ، و ص $\in$ صـ

ونقول إن المتغير ص دالة في المتغير س . يسمى س بالمتغير المستقل و ص بالمتغير التابع .

وفي دراستنا للحسبان سنهتم بدراسة ارتباط المتغيرات بعضها ببعض ، مثلاً نريد أن نعرف العلاقة التى تربط المسافة التى يقطعها جسم ما بسرعته ، أو نعرف علاقة نصف قطر الكرة بحجمها أو مساحة سطحها ، أو تركيز الدواء في دم الإنسان بالفترات بين تناول الجرعات ، وهكذا .

وستقتصر دراستنا في الحسبان على الدوال الحقيقية ، وهى الدوال التى يكون مجالها ومجالها المقابل مجموعتين جزئيتين من مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

وتمثل قاعدة الدالة في أغلب الأحيان بتتابع عمليات حسابية نجريها على عنصر س من المجال سـ لنصل إلى صورته ص في المجال المقابل صـ .

فصورة العنصر ٣ وفق الدالة د (س) = $\text{س}^{٢}$ + ٢س

هى د (٣) = $٣^{٢}$ + ٢ × ٣ = ١٥

وصورة العنصر $^{-}$٢ بالدالة ص = هـ (س) = $\dfrac{\text{٢س} + ١}{\text{س} - ١}$ (س $\neq$ ١)

هى ه (ـ٢) $= \frac{٢ \times (-٢) + ١}{-٢-١} = \frac{-٣}{-٣} = ١$

مثال (١) :

إذا كان ص = د (س) = $س^{٢} - ٥$ فجد :

د (٣) ، د (٥) ، د (٤ + و)

الحل :

د (٣) = $٣^{٢} - ٥ = ٩ - ٥ = ٤$

د (٥) = $٥^{٢} - ٥ = ٢٥ - ٥ = ٢٠$

د (٤ + و) = $(٤ + و)^{٢} - ٥$

$= ١٦ + ٨ و + و^{٢} - ٥$

$= ١١ + ٨ و + و^{٢}$

مجال التعريف للدالة الحقيقية :

فيما يلى بعض الأمثلة للدوال الحقيقية :

ص = د (س) = $س^{٢} + ١$

ص = ه (س) = $\sqrt{٢ س + ١}$

ص = ر (ه) = $جا^{٢}$ ه

ص = د (س) = $\frac{٢ س^{٣} + ١}{١ + س^{٢}}$

فإذا أعطيت الدالة دون تحديد لمجالها ومجالها المقابل فيكون مجالها في هذه الحالة جميع قيم المتغير التى يمكن حساب صورتها وفق قاعدة الدالة . تسمى هذه المجموعة عادة مجال تعريف الدالة ، أو مجموعة التعريف للدالة . أما المجال المقابل فهو المجموعة ح كاملة .

فالدالة ص = د (س) = $س^{٢} + ١$ معرفة لكل عدد حقيقى س فمجال تعريفها هو ح كاملة . وكل دالة في صورة كثيرة حدود يكون مجال تعريفها ح .

أما الدالة :

ص = هـ (س) = $\sqrt{\text{٢ س} - \text{١}}$ فهى معرفة لكل قيم س التى تحقق

٢ س − ١ ≥ ٠ أى س ≥ $\frac{١}{٢}$

∴ مجال تعريف هذه الدالة هو المجموعة { س : س ≥ $\frac{١}{٢}$ ، س ∈ ح }

لاحظ أنه إذا كانت الدالة جذرية يكون مجال تعريفها كل عدد حقيقى يجعل ما داخل الجذر غير سالب . أما إذا كانت الدالة كسرية فمجال تعريفها كل الأعداد الحقيقية عدا تلك التى تجعل المقام صفراً .

مثال (٢) :

جد مجال تعريف كل من الدوال التالية :

(أ) د (س) = $\frac{١}{٢}$

(ب) ر (س) = $\sqrt{\text{س} - \text{٣}}$

(جـ) ق (هـ) = ظا هـ

الحل :

(أ) د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ هذه الدالة معرفة عند كل قيمة

إلا عندما س = ٠ ح

∴ مجال تعريفها = − { ٠ }

(ب) ر (س) = $\sqrt{\text{س} - \text{٣}}$

ر معرفة لكل قيم س التى تحقق

س − ٣ ≥ ٠ ⇒ س ≥ ٣

∴ مجال تعريف الدالة = { س : س ≥ ٣ ، س ∈ ح }

(جـ) ق (هـ) = ظا هـ

وبما أن ظا هـ = $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$

∴مجال تعريف الدالة هى كل قيمة للمتغير هـ عدا قيم هـ التى عندها جتاهـ = ٠

أى مجال التعريف =

$$ح - \{ \pm \frac{\pi}{٢} ، \pm \frac{٣\pi}{٢} ، \pm \frac{٥\pi}{٢} ، ...... \}$$

تمرين (١ – ١)

(١) إذا كان ص = د (س) = س^{٢} – ٣ س + ٥ فجد :

د (٠) ، د (٢) ، د $(-\frac{١}{٢})$

د (٣ أ) ، د (س^{٢}) ، د (س + أ) ، د (د(٢)) .

(٢) إذا كان د (س) = $\frac{١ - س}{٢ + س^{٢}}$ فجد :

د (٠) ، د (– ١) ، د (٢ و) ، د $(\frac{١}{س})$

د (س + و) .

(٣) جد مجال تعريف الدوال التالية :

(أ) ص = د (س) = $\frac{٥}{س - ١}$

(ب) ص = د (س) = $\frac{٣}{س^{٢} - ٩}$

(جـ) هـ =(س) = ٢س^{٢} + ٥س

(د) ص = د (ل) = $\dfrac{١}{\sqrt{ل + ٥}}$

(هـ) س = (س) = $\dfrac{٢س}{\sqrt{٤ - س^٢}}$

(و) ق(س) = ظتا س

(٤) إذا كانت د (س) = أ س + ب فجد :

$$\frac{د (س + و) - د (س)}{و} \quad \text{حيث } و \neq ٠$$

(٥) قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ٢٠٠٠ متر . فإذا كان طولها يساوى س متراً فعبر رمزياً عن الدالة د التى تربط بين المساحة ص والطول س . ما مجال تعريف المتغير س ؟

(٦) إذا سقط جسم من ارتفاع ٥٧٦ قدماً فوق سطح الأرض ، فإنه بعد مضى ن ثانية يكون ارتفاع الجسم عن سطح الأرض مقدراً بالأقدام مساوياً لـــ :
ف = د (ن) = ٥٧٦ – ١٦ $ن^٢$

(أ) أحسب كلاً من د ($\frac{٣}{٢}$) ، د (٦) .

(ب) بعد كم من الزمن يكون الجسم على أرتفاع ٣٢٠ قدماً عن سطح الأرض .

(١ – ٢) تركيبات الدوال :

لتكن د ، هـ الدالتين المعرفتين بـــ :
د (س) = $س^٢$ ، هـ (س) = ٣ س + ١
فالعبارة $س^٢$ + ٣ س + ١ المكونة من حاصل جمع د (س) ، هـ (س) .

تعرّف دالة ثالثة ق (س) حيث :

ق (س) = د (س) + هـ (س) = س^{٢} + ٣ س + ١

الدالة ق تسمى حاصل جمع الدالتين د ، هـ ويرمز لها بالرمز (د + هـ)

ويكون :

ق (س) = (د + هـ) (س) = د (س) + هـ (س)

مثلاً : ق (٢) = د (٢) + هـ (٢) = ٢^{٢} + ٣ × ٢ + ١ = ١١

وبنفس الطريقة يمكن تعريف الفرق بين أى دالتين د ، هـ أو حاصل الضرب أو القسمة أو تركيب دالتين (دالة الدالة) كالآتى :

ر (س) = (د – هـ) (س) = د(س) – هـ (س)

ت (س) = (د ٠ هـ) (س) = د(س) ٠ هـ (س)

$$و (س) = \frac{د}{هـ} (س) = \frac{د (س)}{هـ (س)}$$

د ٥ هـ (س) = د (هـ (س))

وفي كل حالة عدا الحالة الأخيرة يكون مجال الدالة الناتجة هو تقاطع مجالى الدالتين د ، هـ أما دالة خارج القسمة فلاتكون معرفة عند أى قيمة لـــ س إذا كان المقام هـ (س) يساوى صفراً . وفي الحالة الأخيرة يكون مجموعة التعريف هى مجموعة تعريف الدالة هـ ، التى عندها هـ (س) تقع في مجموعة تعريف د (س) .

مثال (١) :

إذا كان د (س) = س^{٣} ، هـ (س) = ٢ س – ١ فإن :

ق (س) = (د + هـ) (س) = د (س) + هـ (س)

= س^{٣} + ٢ س – ١

ر (س) = (د – هـ) (س) = د (س) – هـ (س)

= س^{٣} – ٢ س + ١

ل (س) = (د ٠ هـ) (س) = د(س) ٠ هـ (س)

= س^{٣} (٢ س – ١) = ٢ س^{٤} – س^{٣}

$$م (س) = \frac{د}{هـ} (س) = \frac{د (س)}{هـ (س)} = \frac{س^{٣}}{٢س - ١}$$

د (هـ (س)) = د (٢ س − ١) = (٢ س − ١)^{٣}

هـ (د (٢)) = هـ (٢^{٣}) = هـ (٨) = ٢ × ٨ − ١ = ١٥

تمرين (١ − ٢)

(١) إذا كانت د (س) = ٣ − ٢ س ، هـ (س) = س^{٢} + ١

جد : (أ) (د + هـ) (٢) ، (ب) (د − هـ) (٢) ، (جـ) $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$

(د) د (هـ (٢)) ، (هـ) هـ (د (٢))

(٢) إذا كانت د (س) = ٤ س − ٣ ، هـ (س) = س^{٢} − ٥ س + ١

جد :

(أ) د + هـ (ب) د − هـ (جـ) د • هـ (د) $\frac{\text{د}}{\text{هـ}}$

(هـ) د ○ هـ

(٣) إذا كانت د (س) = س^{٢} − ٣ س جد كلاً من الدوال التالية :

(أ) ق (س) = د (د (س)) (ب) هـ (س) = $\sqrt{\text{د (س)}}$

(جـ) ر (س) = $\frac{\text{د (س) − د (٦)}}{\text{س − ٦}}$

(٤) إذا كان د (س) = س^{٢} ، هـ (س) = جا س

جد : (د + هـ) (س) ، (د • هـ) (س)

د (هـ (س)) ، هـ (د (س))

(١ – ٣) النهـايات :

في هذا الفصل نتناول مفهوم ومعنى النهايات والتى لاغنى عنها لدراسة الموضوع الرئيس في هذا الكتاب موضوع التفاضل والتكامل . ونمهد للنهايات بالمثال التالى :

اعتبر الدالة

$$ص = د (س) = \frac{٢ س^{٢} - س - ٦}{س - ٢}$$

نلاحظ أننا نستطيع إيجاد قيمة د (س) عند أى قيمة حقيقية للمتغير س ما عدا القيمة س = ٢ ، إذ أن التعويض بالعدد ٢ في د (س) يعطينا د (٢) = $\frac{صفر}{صفر}$ وهذا ليس عدداً حقيقياً معرفاً .

ما سنبحثه في هذا الفصل هو : إذا كان من المستحيل إيجاد قيمة د(س) عندما س = ٢ فما هى أقرب قيمة تأخذها د (س) عندما تكون س أقرب ما يمكن من العدد ٢؟ أى ما هى القيمة التى تقترب منها د (س) عندما تكون س قريبة جداً من ٢ ؟

بالنسبة لهذا المثال نلاحظ أن :

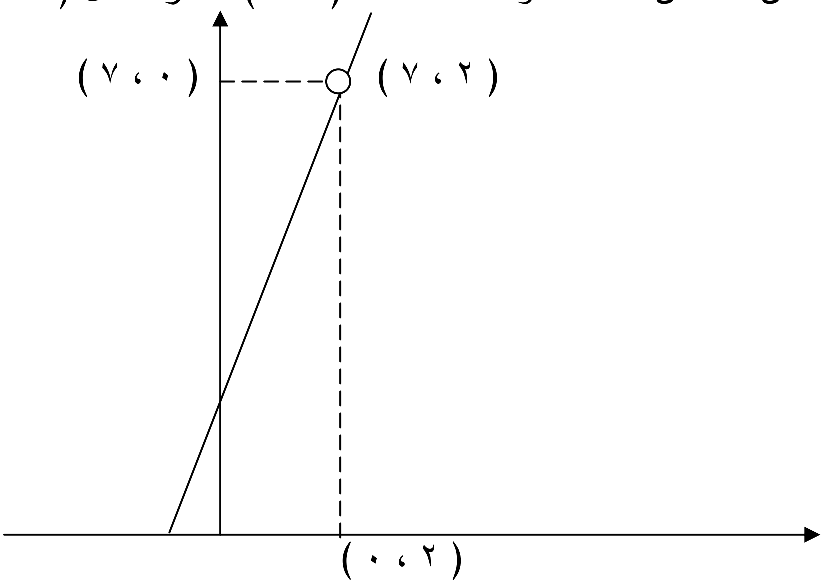
$$د (س) = \frac{٢ س^{٢} - س - ٦}{س - ٢}$$

$$= \frac{(س - ٢) (٢ س + ٣)}{س - ٢} = ٢ س + ٣$$

بشرط س $\neq$ ٢

هذا يعنى أن الدالة د (س) تساوى الدالة ت (س) = ٢ س + ٣ لكل قيم س عدا س = ٢ . فمن الناحية الهندسية فإن الشكــل البيانى للدالـــة د (س) هو

المستقيم ص = ٢ س + ٣ محذوفاً منه النقطة (٢ ، ٧). أنظر الشكل (١ – ١) .



الشكل (١ – ١)

ومن الشكل إذا اقتربت س من العدد ٢ فإن د (س) تكون قريبة جداً من العدد ٧ . يوضح ذلك الجدول (١ – ١) والجدول (١ – ٢) ، حيث حسبنا قيم د (س) المناظرة لبعض قيم س التى تقترب شيئاً فشيئاً من العدد ٢ .

ففى الجدول (١ – ١) تقترب س من العدد ٢ من اليمين ونرمز لذلك بالرمز س ← ٢^{+} .

وفي الجدول(١ – ٢) تقترب س من ٢ من اليسار ونرمز لذلك بالرمز س ← ٢^{-}.

س	د (س)
٣	٩
٢,٥	٨
٢,١	٧,٢
٢,٠١	٧,٠٢
٢,٠٠١	٧,٠٠٢
٢,٠٠٠١	٧,٠٠٠٢
٢,٠٠٠٠١	٧,٠٠٠٠٢
↓	↓
٢	٧

جدول رقم (١ – ١)
الاقتراب من ٢ من اليمين .

س	د (س)
١	٥
١,٥	٦
١,٩	٦,٨
١,٩٩	٦,٩٨
١,٩٩٩	٦,٩٩٨
١,٩٩٩٩	٦,٩٩٩٨
١,٩٩٩٩٩	٦,٩٩٩٩٨
↓	↓
٢	٧

جدول رقم (١ – ٢)
الاقتراب من ٢ من اليسار .

فالعدد ٧ هو العدد الذى تقترب منه د (س) عندما تكون س قريبة من العدد ٢ . نعبر عن هذا رمزياً كالآتى :

$$\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـــــا}}\ د\ (س) = ٧$$

وتقرأ : نهاية الدالة د (س) عندما تؤول س إلى ٢ تساوى ٧ .

ويلاحظ أننا نستطيع أن نجعل الفرق المطلق بين د (س) والعدد ٧ أقل من أى عدد نختاره مهما كان هذا العدد صغيراً ، وذلك بجعل الفرق المطلق بين س والعدد ٢ صغيراً صغراً كافياً . فمثلاً إذا اردنا أن نجعل الفرق المطلق | د (س) – ٧ | أقل من ٠,٠٠٢ يكفى أن نجعل الفرق المطلق | س – ٢ | أقل من ٠,٠٠١ كما يتضح من السطر الخامس من الجدولين (١ – ١) و (١ – ٢) .

وبصفة عامة يمكن أن نصل إلى التعريف التالي :–

تعريف :-

إذا كان لدينا دالة ص = د (س) وكان أ عدداً حقيقياً لا يشترط أن يكون في مجال تعريف الدالة فإن التعبير :

$$\lim_{س \to أ} د (س) = ل$$

يعنى أن د (س) تقترب من العدد ل كلما اقتربت س من العدد أ بحيث يمكن جعل الفرق المطلق | د (س) – ل | صغيراً كيفما نشاء بجعل الفرق المطلق |س – أ | صغيراً صغراً كافياً .

تقترب من أ لا دخل له بالقيمة د (أ) . ففى المثال التمهيدى السابق كان للنهاية قيمة حقيقية تساوى ٧ بينما الدالة نفسها غير معرفة عند س = ٢ .

فهناك حالات تكون فيها د (أ) غير معرفة ولكن نها د (س) موجودة بينما هنالك حالات فيها د (أ) معرفة ولكن $\lim_{س \to أ}$ د (س) غير موجودة أو إن وجدت لا تساوى د(أ) . وفي بعض الحالات تكون د (أ) موجودة وتساوى $\lim_{س \to أ}$ د(س) .

وجود النهاية نها د (س) يقتضى أن تساوى عدداً حقيقياً معيناً . أمَّا إذا كانت هذه النهاية لها أكثر من قيمة مختلفة أو كانت أكبر من أى عدد يمكن أن نتصوره فإننا نقول إن النهاية ليس لها وجود . وقد اتفق على كتابتها على النحو التالى :

$$\lim_{س \to أ} د (س) = \infty$$

إذا كانت ليس لها قيمة محدودة

مثال (١) :

إذا كان :

$$د(س) = \begin{cases} س + ١ & ، س < ١ \\ ٢س + ٥ & ، س \geq ١ \end{cases}$$

فإن :

$\lim_{س \to ١}$ نها د (س) غير موجودة .

وذلك لأنه إذا اقتربت س من ١ من جهة اليمين فإن قيمة الدالة تقترب من ٧ أما إذا اقتربت س من ١ من جهة اليسار فإن قيمة الدالة تقترب من ٢ . (لاحظ أن قيمة د (١) = ٧ معرفة) .

مثال (٢) :

إذا كانت

$$د(س) = \frac{١}{س + ٢}$$

$$\text{فإن } \lim_{س \to -٢} \frac{١}{س + ٢} = \infty$$

أى غير موجودة وذلك لأنه كلما اقتربت س من −٢ شيئاً فشيئاً تزداد قيمة د (س) عددياً بصورة غير محدودة .

من الأمثلة التمهيدية السابقة يتضح لنا أنه ليس هنالك علاقة بين قيمة الدالة د (س) عند أ وبين $\lim_{س \to أ}$ د (س) ، فقد تكون الدالـــة معرفة عند أ

وليس لها نهاية عندما تؤول س إلى أ ، كما قد تكون الدالة غير معرفة عند أ بينما تؤول فيها إلى نهاية محددة عند أقتراب س من أ .

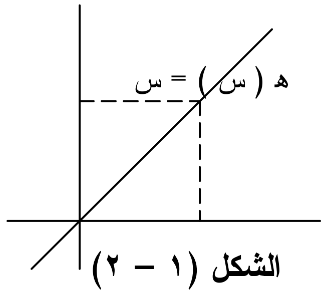
ويمكننا التوصل إلى بعض النظريات أو القواعد التى تساعدنا على إيجاد النهاية بصورة سريعة دون أن نلجأ إلى طريقة الرسم أو تكوين الجداول .

فالدالة الثابتة د (س) = ٣ مثلاً لاتتغير قيمة د (س) بتغير قيم س وهذا يعنى أن :

$\lim_{س \to أ}$ د (س) = ٣ لأى عدد حقيقى أ

وكذلك الدالـــة ه (س) = س . فـــإذا كوّنا الجدول أو رسمنا منحنى هذه الدالة (شكل (١ – ٢)) نجـــد أن قيمـــة ه (س) عندما تقترب قيمة س من أى عدد حقيقى أ هى :

$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ س = أ



الشكل (١ – ٢)

وكذلك إذا رسمنا منحنى الدالة :

ق (س) = ٢ س + ٤

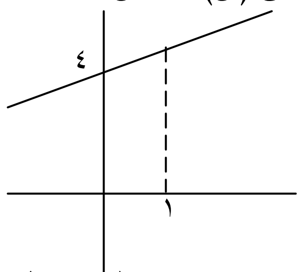
وبحثنا عن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نها}}$ ق (س) نلاحظ :

من الرســـم (شكل (١ – ٣)) أن :

$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ (٢ س + ٤) = ٦

لاحظ أن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ ٢ س = ٢وأن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}}$ ٤= ٤

ق (س) = ٢ س + ٤



الشكل (١ – ٣)

من الأمثلة السابقة يمكننا التوصل إلى النظرية التالية :

نظرية (١ – ١) :

(١) إذا كان د (س) = جـ حيث جـ عدد حقيقى فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ د (س) = جـ لأى عدد حقيقى أ .

(٢) إذا كان ق (س) = س
فإن $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ ق (س) = أ لآى عدد حقيقى أ

(٣) وإذا كان ه (س) = م س + جـ فإن
$\underset{س \leftarrow أ}{\text{نها}}$ ه (س) = م أ + جـ

مثال (٣) :

إذا كان هـ (س) = س + ٥ جد :

(أ) ٣ هـ (س)　　(ب) نهـا$_{س ← ١}$ ٣ هـ (س)　　(جـ) ٣ نها$_{س ← ١}$ هـ (س)

الحل :

(أ) ٣ هـ (س) = ٣ (س + ٥) = ٣ س + ١٥

(ب) نها$_{س ← ١}$ ٣ هـ (س) = نها$_{س ← ١}$ (٣ س + ١٥) = ١٨

(جـ) ٣ نها$_{س ← ١}$ هـ (س) = ٣ نها$_{س ← ١}$ (س + ٥) = ٣ × ٦ = ١٨

مثال (٤) :

إذا كان ق (س) = س^{٢}

هـ (س) = س + ١ ، جد :

(أ) ق (س) × هـ (س)

(ب) نها$_{س ← ٢}$ (ق (س) × هـ (س))

(جـ) نها$_{س ← ٢}$ ق (س) × نها$_{س ← ٢}$ هـ (س)

الحل :

(أ) قاعدة ق (س) × هـ (س) = س^{٢} (س + ١) = س^{٣} + س^{٢}

(ب) نها$_{س ← ٢}$ (ق (س) × هـ (س)) = نها$_{س ← ٢}$ (س^{٣} + س^{٢}) = ٨ + ٤ = ١٢

(جـ) نها$_{س ← ٢}$ ق (س) × نها$_{س ← ٢}$ هـ (س) = نها$_{س ← ٢}$ س^{٢} . نها$_{س ← ٢}$ (س + ١) = ٤ × ٣ = ١٢

من الأمثلة السابقة يمكننا التوصل إلى النظرية التالية :

نظرية (١ – ٢) :

إذا كانت نها$_{س \leftarrow أ}$ ق (س) = ل ، نها$_{س \leftarrow أ}$ هـ (س) = ك

وكان جـ و ن عددين حقيقيين ثابتين فإن :

(١) نها$_{س \leftarrow أ}$ (ق (س) ± هـ (س)) = نها$_{س \leftarrow أ}$ ق (س) ± نها$_{س \leftarrow أ}$ هـ (س)

= ل ± ك

(٢) نها$_{س \leftarrow أ}$ جـ ق (س) = جـ نها$_{س \leftarrow أ}$ ق (س) = جـ ل

(٣) نها$_{س \leftarrow أ}$ (ق (س) · هـ (س)) = نها$_{س \leftarrow أ}$ ق (س) · نها$_{س \leftarrow أ}$ هـ (س) = ل ك

(٤) نها$_{س \leftarrow أ}$ $\dfrac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}}$ = $\dfrac{\text{نها}_{س \leftarrow أ}\ \text{ق (س)}}{\text{نها}_{س \leftarrow أ}\ \text{هـ (س)}}$ = $\dfrac{\text{ل}}{\text{ك}}$ (ك ≠ ٠)

(٥) نها$_{س \leftarrow أ}$ (ق (س))^{ن} = (نها$_{س \leftarrow أ}$ ق (س))^{ن} = ل^{ن}

مثال (٥) :

إذا كان د (س) = س^{٢} – ٣ س + ٥ ، جد :

(أ) د (–٢) (ب) نها$_{س \leftarrow -٢}$ د (س)

الحل :

(أ) د (–٢) = (–٢)^{٢} – ٣ (–٢) + ٥

= ٤ + ٦ + ٥ = ١٥

(ب) نها$_{س \leftarrow -٢}$ (س^{٢} – ٣ س + ٥) = نها س^{٢} – ٣ نها$_{س \leftarrow -٢}$ س + نها$_{س \leftarrow -٢}$ ٥

= ٤ – ٣ × -٢ + ٥ = ٤ + ٦ + ٥ = ١٥

لاحظ أن $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نها}}$ د (س) = د (-٢)

يمكننا التوصل إلى القاعدة التالية :

> إذا كان ق (س) كثيرة حدود من الدرجة ن ، حيث :
>
> ق (س) = م$_{\text{ن}}$ س$^{\text{ن}}$ + م$_{\text{ن}-١}$ س$^{\text{ن}-١}$ + ... + م$_{١}$ س + م$_{٠}$. م$_{\text{ن}}$ ≠ ٠
>
> فإن $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}$ ق (س) = ق (أ)

تمرين (١ – ٣)

(١) استخدم نظريات النهايات لايجاد نهاية كل من الدوال التالية:

(أ) $\underset{\text{س} \leftarrow \sqrt{٣}}{\text{نها}}$ ١٣ (ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١٠}{\text{نها}}$ (٤ س + ٣)

(جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}}$ (٢ س^{٢} + ٥ س) (س^{٣} + ١)

(٢) إذا علمت أن $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ د (س) = ٥ ، $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ هـ (س) = -٣ فجد :

قيمة كل من :

(أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ (٢ د (س) – هـ (س))

(ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ هـ^{٢} (س)

(جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}}$ (د (س) × ٣ هـ (س))

(٣) احسب : $\underset{س \leftarrow -١}{نها}$ (٣ س^{٥} − ٢ س^{٢} − ١)

(٤) جد النهايات التالية :

(أ) $\underset{س \leftarrow ٠}{نها}$ (٧ س^{٢} − ٥) (ب) $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ (٢ س + ٣) (س^{٢} − ١)

(جـ) $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{نها}$ (٣ − ٢ س)^{٥} (د) $\underset{س \leftarrow -١}{نها}$ ٢ (س^{٥} − ٣ س^{٣} + ١)

(٥) إذا علمت أن $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ د (س) = ٧

فجد النهايات التالية :

(أ) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ (٢ د (س) − ٥) (ب) $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ د^{٢} (س)

(١ – ٤) النهايات للدوال الكسرية :

ما يعنينا الآن هو دراسة بعض الطرق لإيجاد النهايات عندما نحصل على قيم غير معرفة في حالة التعويض المباشر في الدالة . في دراستنا لهذه الطرق سنركز فقط على الحالة التى تكون فيها الدالة على الصورة :

$$\frac{د_{١} (س)}{د_{٢} (س)}$$ ، حيث أن :

$\underset{س \leftarrow \infty}{نها}$ د$_{١}$ (س) = $\underset{س \leftarrow \infty}{نها}$ د$_{٢}$ (س) = ∞

أو :

$\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د$_{١}$ (س) = $\underset{س \leftarrow أ}{نها}$ د$_{٢}$ (س) = صفر

(أ) في الحالة الأولى التي يكون فيها ناتج التعويض $\frac{\infty}{\infty}$ ، تقسم كلاً من البسط والمقام على س مرفوعة لأكبر أس علماً بأن $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ن}}} = ٠$.

نوضح ذلك في الأمثلة التالية :

مثال (١) :

جد $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٧}{٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ١}$

الحل :

نقسم كلاً من البسط والمقام على س٢ (أعلى قوة للمتغير س في المقام) لنحصل على :

$$\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٧}{٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ١} = \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ - \frac{٣}{\text{س}} + \frac{٧}{\text{س}^{٢}}}{٣ + \quad \frac{٥}{\text{س}} \quad \frac{١}{\text{س}^{٢}}}$$

فعندما تغدو س أكبر فاكبر ، فإن الحدين $\frac{-٣}{\text{س}}$ ، $\frac{٧}{\text{س}^{٢}}$ في البسط

يغدوان أصغر فاصغر ، وبالتالى فإن البسط كله يقترب من ٢ ، وبالمثل يقترب المقام من ٣ .

وبالتالى فإن الدالة المعطاه تقترب من القيمة النهائية $\frac{٢}{٣}$.

مثال (٢) :

جد $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \frac{٤\text{س}^{٢} + ٣}{٥\text{س}^{٣} - ٧}$

بالقسمة على أعلى قوة للمتغير س وهي س٣ نحصل على:

الحل :

$$\lim_{س \to \infty} \frac{٤ س^{٢} + ٣}{٥ س^{٣} - ٧} = \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٤}{س} + \frac{٣}{س^{٣}}}{٥ - \frac{٧}{س^{٣}}}$$

$$= \frac{صفر}{٥} = صفر$$

مثال (٣) :

جد : $\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٤} + ٥ س - ١}{س^{٣} + ٣}$

الحل :

بالقسمة على أعلى قوة للمتغير س في المقام نحصل على :

$$\lim_{س \to \infty} \frac{س^{٤} + ٥ س - ١}{س^{٣} + ٣} = \lim_{س \to \infty} \frac{س + \frac{٥}{س^{٢}} - \frac{١}{س^{٣}}}{١ + \frac{٣}{س^{٣}}} = \infty$$

(ب) الحالة الثانية والتي يكون ناتج التعويض فيها $\frac{صفر}{صفر}$ نحلل البسط والمقام لاستخراج العامل المشترك (س – أ) واختصار هذا العامل المشترك ثم التعويض في المقدار الناتج عن س بالقيمة أ لنحصل على النهاية المطلوبة كما في الأمثلة التالية

مثال (٤) :

جد : $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س - ٤}$

الحل :

عند التعويض المباشر نحصل على $\frac{صفر}{صفر}$ وهى قيمة غير معرفة

ولكن :

$$\frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س - ٤} = \frac{\cancel{(س - ٤)}\,(س + ٢)}{\cancel{(س - ٤)}}$$

$$= س + ٢ \quad ، \quad س \neq ٤$$

إذن :

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٨}{\text{س} - ٤} = \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نها}} (\text{س} + ٢) = ٦$$

وقد نلجأ احياناً إلى تبسيط الدالة التى يصعب تحليلها إلى الضرب في المرافق ، ويكون ذلك غالباً في الدوال التى تشمل على مقادير جذرية في بسطها أو مقامها فلإيجاد النهاية التالية :

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س} - ١} - \sqrt{٣}}{\text{س} - ٤}$$

ستجد أن التعويض المباشر يعطيك قيمة غير محددة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ولكن يمكنك ازالة الجذر من البسط وذلك بضرب كل من البسط والمقام للدالة في المقدار $\sqrt{\text{س} - ١} + \sqrt{٣}$ وهو ما يعرف بالمرافق للمقدار $\sqrt{\text{س} - ١} - \sqrt{٣}$ لتصبح :

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س} - ١} - \sqrt{٣}}{\text{س} - ٤} \times \frac{\sqrt{\text{س} - ١} + \sqrt{٣}}{\sqrt{\text{س} - ١} + \sqrt{٣}}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{(\text{س} - ٤)}{(\text{س} - ٤)(\sqrt{\text{س} - ١} + \sqrt{٣})}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٤}{\text{نها}} \frac{١}{(\sqrt{\text{س} - ١} + \sqrt{٣})} = \frac{١}{٢\sqrt{٣}}$$

تمرين (١ – ٤)

جد النهايات التالية :

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}$

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{(١ + \text{س})^{٢} - ١}{\text{س}}$

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤ س^٢ + ٥}{٢س^٢ + ١}$

(٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س + ٧}{\sqrt{٤س^٢ + ٥}}$ ، أقسم البسط والمقام على س

(٥) $\lim_{س \to ١٥} \frac{\sqrt{س - ٦} - ٣}{س - ١٥}$

(٦) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{س + ٣} - ٢}{س - ١}$

(٧) $\lim_{س \to ٠} \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ٤} - ٢}$

(٨) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س - ٢} - ٣}{س - ٣}$

(٩) أثبت أن $\lim_{و \to ٠} \frac{(س + و)^٢ - س^٢}{و} = ٢ س$

(١٠) $\lim_{ن \to \infty} \frac{١+٢+٣+.... + ن}{ن^٢}$

(١ – ٥) بعض النهايات الهامة :

(١) إذا كان ن عدداً صحيحاً موجباً فإن :

$$\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن أ^{ن - ١}$$

البرهان :

فك القوسين في المقدار التالى :

$(س - أ) \quad (س^{ن - ١} + أ س^{ن - ٢} + أ^٢ س^{ن - ٣} + .. + أ^{ن - ٢} س + أ^{ن - ١})$

$$= س^{ن} + أ\, س^{ن-١} + أ^{٢} س^{ن-٢} + \dots\dots + أ^{ن-١} س - أ\, س^{ن-١}$$

$$- أ^{٢} س^{ن-٢} - \dots\dots - أ^{ن-١} س - أ^{ن} = س^{ن} - أ^{ن}$$

$$\therefore\ س^{ن} - أ^{ن} = (س - أ)\,(س^{ن-١} + أ\, س^{ن-٢} + أ^{٢} س^{ن-٣} + \dots + أ^{ن-١})$$

بالقسمة على س − أ

$$\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = س^{ن-١} + أ\, س^{ن-٢} + \dots + أ^{ن-٢} س + أ^{ن-١}$$

(لاحظ أن هناك ن من الحدود في الطرف الأيسر) .

إذن :

$$\text{نها}_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = \text{نها}_{س \to أ} (س^{ن-١} + أ\, س^{ن-٢} + \dots + أ^{ن-٢} س + أ^{ن-١})$$

$$= أ^{ن-١} + أ^{ن-١} + \dots\dots + أ^{ن-١} + أ^{ن-١}$$

$$= ن\, أ^{ن-١}$$ وهو المطلوب

مثال (١) :

$$\text{نها}_{س \to ٥} \frac{س^{٤} - ٦٢٥}{س - ٥} = \text{نها}_{س \to ٥} \frac{س^{٤} - ٥^{٤}}{س - ٥}$$

$$= ٤ \times ٥^{٤-١} = ٤ \times ١٢٥ = ٥٠٠$$

نتيجة مباشرة :

$$\text{نها}_{س \to أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م}\, أ^{ن-م}$$

حيث ن ، م عددان صحيحان موجبان .

البرهان :

$$\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} \div \frac{س^{م} - أ^{م}}{س - أ}$$

$$\lim_{س \leftarrow أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{\lim_{س \leftarrow أ} \dfrac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}}{\lim_{س \leftarrow أ} \dfrac{س^{م} - أ^{م}}{س - أ}} = \frac{ن\, أ^{ن - ١}}{م\, أ^{م - ١}}$$

$$\therefore \lim_{س \leftarrow أ} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م}\, أ^{ن - م}$$

وهو المطلوب

مثال (٢) :

$$\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٥} - ٢٤٣}{س^{٤} - ٨١} = \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س^{٥} - ٣^{٥}}{س^{٤} - ٣^{٤}} = \frac{٥}{٤} \times ٣^{٥ - ٤}$$

$$= \frac{١٥}{٤}$$

في الواقع أن هذه النهاية ليست صحيحة فقط حينما تكون ن عدداً صحيحاً موجباً ، بل هى صحيحة كذلك حينما تكون ن أى عدد حقيقي ولكن برهان ذلك خارج نطاق هذا الكتاب

مثال (٣) :

$$\lim_{س \leftarrow أ} \frac{\sqrt{س} - \sqrt{أ}}{س - أ} = \lim_{س \leftarrow أ} \frac{س^{\frac{١}{٢}} - أ^{\frac{١}{٢}}}{س - أ}$$

$$\frac{١}{٢}\, أ^{\frac{١}{٢} - ١} = \frac{١}{٢\sqrt{أ}}$$

نشاط :

حاول إيجاد النهاية في المثال السابق بضرب وقسمة الدالة بمرافق البسط .

تمرين (١–٥)

جد النهايات التالية :

(١) $$\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^3 - 1}{\text{س} - 1}$$

(٢) $$\underset{\text{س} \leftarrow -1}{\text{نها}} \frac{\text{س}^5 + 1}{\text{س} + 1}$$

(٣) $$\underset{\text{س} \leftarrow -3}{\text{نها}} \frac{\text{س} + 3}{\text{س}^3 + 27}$$

(٤) $$\underset{\text{س} \leftarrow -2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^5 + 32}{\text{س}^3 + 8}$$

(٥) $$\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نها}} \frac{\text{س}^6 - 64}{\text{س} - 2}$$

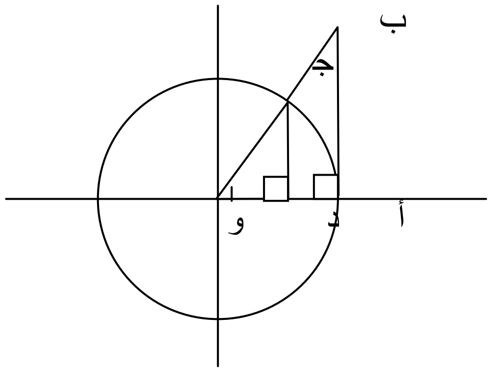
(٦) $$\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}} - 1}{\text{س} - 1}$$

(٧) $$\underset{\text{س} \leftarrow -2}{\text{نها}} \frac{\text{س} + 2}{\text{س}^3 + 8}$$

(٨) $$\underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{3}}{\text{نها}} \frac{27\text{س}^3 - 1}{3\text{س} - 1}$$

(٩) $$\underset{\text{س} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{(1 + \text{س})^2 - 1}{\text{س}}$$

(١٠) $$\underset{\text{و} \leftarrow 0}{\text{نها}} \frac{(\text{س}+\text{و})^4 - \text{س}^4}{\text{و}}$$



الشكل (١ – ٤)

الشكل (١ – ٤) يمثل دائرة نصف قطرها الوحدة مركزها نقطة الأصل و، ∠ أ و جـ = س (بالتقدير الدائرى) ، أ ب مماس للدائرة عند أ ، جـ د عمود نازل من جـ على أ و .

طول القوس أ جـ = محيط الدائرة × $\frac{\text{الزاوية المركزية (س)}}{\text{الزاوية الكاملة (٢}\pi\text{)}}$

$= ٢\pi \times ١ \times \frac{\text{س}}{٢\pi} = \text{س}$

ظا س = $\frac{\overline{\text{أ ب}}}{\overline{\text{أ و}}} = \frac{\overline{\text{أ ب}}}{١} = \overline{\text{أ ب}}$

جا س = $\frac{\overline{\text{جـ د}}}{\overline{\text{جـ و}}} = \frac{\overline{\text{جـ د}}}{١} = \overline{\text{جـ د}}$

لاحظ من الشكل أن :

طول القوس أ جـ > جـ د

جـ د = جا س ، القوس أ جـ = س

∴ جا س < س

فإذا كانت ٠ < س < $\frac{\pi}{٢}$

فإن ٠ < جا س < س

ونأخذ النهاية عندما س ← ٠ نجد أن :

$$\boxed{\lim_{\text{س} \to ٠} \text{جا س} = ٠}$$

ومن المعلوم أن :

١ – جتا س = ٢ جا² (س/٢)

ولما كانت نها جا (س/٢) = ٠ ، عندما س ← ٠

∴ نها (١ – جتا س) = ٠ ، عندما س ← ٠

$$\boxed{\therefore \lim_{\text{س} \to ٠} \text{جتا س} = ١}$$

لاحظ من الشكل أن $\overline{\text{جـ د}}$ < طول القوس أ جـ < $\overline{\text{أ ب}}$

أى أن :

جا س < س < ظا س

بما أن س موجبة فإن :

(١ / جا س) < (١ / س) < (١ / ظا س)

بالضرب في جا س نجد أن :

١ < (جا س / س) < جتا س

هذه المتباينة صحيحة حتى إذا كان س سالبة حاول اثبات ذلك . بأخذ النهاية عندما س ← ٠ .

$$\lim_{س \leftarrow ٠} ١ \le \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا\,س}{س} \le \lim_{س \leftarrow ٠} جتا\,س$$

$$\text{أي } ١ \le \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا\,س}{س} \le ١ \quad (\text{لأن } جتا\,٠ = ١)$$

$$١ = \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا\,س}{س} = ١$$

إذن

$$\boxed{\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا\,س}{س} = ١}$$ ، وهو المطلوب .

مثال (٤) :

أثبت أن $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{ظا\,س}{س} = ١$

الحل :

$$\frac{ظا\,س}{س} = \frac{جا\,س}{س} \times \frac{١}{جتا\,س}$$

$$\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{ظا\,س}{س} = \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا\,س}{س} \times \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{١}{جتا\,س}$$

$$= ١ \times ١ = ١$$

مثال (٥) :

جد $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{جا٣\,س}{س}$

الحل :

ضع ع = ٣ س . ع ← ٠ عندما س ← ٠

إذن :

$$\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{س}} = \underset{ع \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا ع}}{\frac{\text{ع}}{٣}} = \underset{ع \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٣\text{جا ع}}{\text{ع}}$$

$$= ٣ \underset{ع \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا ع}}{\text{ع}} = ٣ \times ١ = ٣$$

تمرين (١ – ٦)

جد النهايات التالية :–

(١) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٣\text{ س}}{\text{جا}٥\text{ س}}$

(٢) $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نها}} \text{ س جا } \frac{١}{\text{س}}$

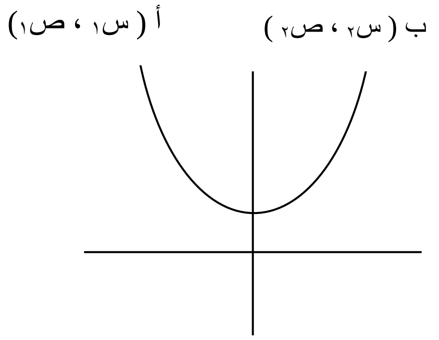
(٣) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٥\text{ س}}{\text{س}}$

(٤) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}٣\text{ س}}{\text{س}}$

(٥) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}^{٢}}$

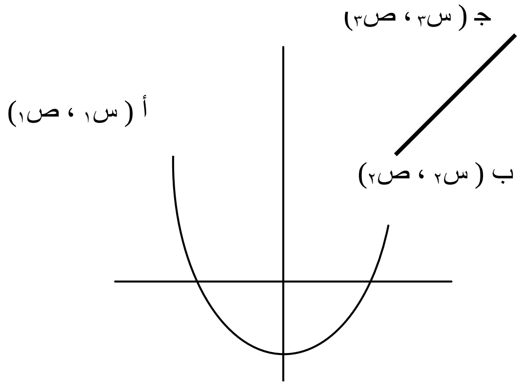
(١ – ٧) الدوال المتصلة :

عرفت أن كل داله يمكن رسم المنحنى لها على المستوى الديكارتي ، ويمكن تعرّف بعض خواصها من خلال الرسم . والشكل (١ – ٥) يمثل منحنى الدالة . د (س) = $\text{س}^{٢}$ + ١



الشكل (١ – ٥)

نلاحظ أنك إذا وضعت رأس القلم عند أي نقطة أ ($\text{س}_{١}$ ، $\text{ص}_{١}$) على المنحنى وسرت على المنحنى باتجاه ب ($\text{س}_{٢}$ ، $\text{ص}_{٢}$) فإنك ستصل إلى هذه النقطة دون أن ترفع القلم عن المنحنى ، ويقال إن المنحنى متصل في الفترة [$\text{س}_{١}$، $\text{س}_{٢}$] .



الشكل (١ – ٦)

أما الشكل (١–٦) فيمثل منحنى الدالة

$$\text{ه} (\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ \text{ ، } \text{س} \le \text{س}_{٢} \\ ٢\text{س} + ١ \text{ ، } \text{س} > \text{س}_{٢} \end{cases}$$

تلاحظ أنك إذا وضعت رأس القلم عند أ وأردت أن تصل إلى ب الواقعة على المنحنى فإنك ستصل إلى هذه النقطة دون أن ترفع القلم أي أن الدالة متصلة في الفترة [$\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$] . أما إذا أردت أن

تصل من ب إلى النقطة جـ (س$_{٣}$ ، ص$_{٣}$) دون أن ترفع القلم ، فإنك لا تستطيع. نقول في مثل هذه الحالة إن الدالة هـ غير متصلة في الفترة [س$_{٢}$ ، س$_{٣}$] لأنها غير متصلة عند النقطة التي عندها س = س$_{٢}$. وإذا كانت س$_{٢}$ = ٢

فإن نها هـ (س) = ٥

بينما نها هـ (س) $^{-}$ = ٣
س ← ٢

أي أن نها هـ (س) غير موجودة لأن النهاية من اليمـــين لا تســـاوى

النهاية من اليسار عند س = ٢ .

لكنك إذا حسبت نها هـ (س) = نها هـ (س) = ٠

أي أن نها هـ (س) = ٠ وكذلك هـ (١) = ٠

لاحظ من الرسم أن هـ (س) متصلة عند س = ١ .

مما سبق يمكن صياغة التعريف التالي :

تعريف (١ – ١) :

تكون الدالة د متصلة عند س = أ إذا تحققت الشروط التالية :

(١) أ تنتمي إلى مجال الدالة د .

(٢) نها د (س) موجودة .

(٣) نها د (س) = د (أ)

تعريف (١ – ٢) :

نقول إن الدالة د (س) متصلة على الفترة
[أ ، ب] إذا كانت د متصلة عند كل نقطة
من نقاط الفترة [أ ، ب]

من تعريف الاتصال عرفنا الارتباط بينه وبين النهايات التي تعرضنا إلى بعض النظريات الخاصة بها .

ويمكن أن نستخلص من ذلك نظريات في الاتصال تساعد على الحكم على اتصال دالة ما عند نقطة أو في فترة .

نظرية (١ – ٣) :

إذا كان كل من الدالتين د (س) ، هـ (س) متصلة عند س = أ فإن:
(١) د (س) ± هـ (س) متصلة عند س = أ .
(٢) جـ ٠ د (س) متصلة عند س = أ حيث جـ عدد حقيقي .
(٣) د (س) ٠ هـ (س) متصلة عند س = أ .

(٤) $\frac{د(س)}{هـ(س)}$ ـصلة عند س = أ حيث هـ (أ) ≠ ٠

(٥) إذا كان د (س) = $م_{ن}$ $س^{ن}$ + $م_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + ... $م_{١}$ س + $م_{٠}$. كثيرة حدود من الدرجة ن فإن :

د (س) متصلة لكل عدد حقيقي س .

مثال (١) :

إذا كان ق (س) = ٢ $س^{٣}$ – ٣ س + ٥ بين أن الدالة ق متصلة لجميع قيم س الحقيقية .

الحل :

نها ق (س) = ق (أ) لجميع قيم أ الحقيقية لأن ق كثيرة حدود .

∴ ق متصلة لجميع قيم س الحقيقية .

مثال (٢) :

ليكن د (س) = $\begin{cases} ٥ - ٢ س & ، -١ \leqslant س < ٢ \\ ٢ س - ٣ & ، ٢ \leqslant س \leqslant ٣ \end{cases}$

اثبت أن الدالة د متصلة على الفترة [–١ ، ٣]

الحل :

من التعريف د (س) متصلة في الفترة [−١ ، ٢[لأن د كثيرة حدود وكذلك على الفترة [٢ ، ٣] ، ولكن نبحث عن الاتصال عند س = ٢ وهى النقطة التي تتغير عندها قاعدة الدالة. فنجد أن $\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ د (س) = ٢×٢ − ٣ =١

$\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}$ د (س) = ٥ − ٢ × ٢ = ١

$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{\text{نها}}$ د(س) = $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{\text{نها}}$ د(س) = ١

وأن د (٢) = ٢ × ٢ − ٣ = ١

إذن د(س) متصلة عند س = ٢

د متصلة على الفترة [−١ ، ٣]

مثال (٣) :

ليكن ق (س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س + ٢}$

أبحث في اتصال ق عند س = −٢

الحل :

إن ق غيــر معرفة عنــد س = −٢ على الرغــم من أن

$$\lim_{س \to -2} ق(س) = \lim_{س \to -2} \frac{(س - 2)(س + 2)}{س + 2} = \lim_{س \to -2} (س - 2) = -4$$

وبالاعتماد على تعريف الاتصال عند نقطة فإن ق غير متصلة عند س = −٢

وما عدا ذلك فإن ق متصلة عند س = أ لجميع قيم أ .

تمرين (١ – ٧)

بين فيما إذا كانت كل من الدوال التالية متصلة عند النقطة المذكورة إزاء كل منها:

(١) ق (س) = { س^{٢} + ١   س ≠ ٤ ،   عند س = ٤
١٥   س = ٤ }

(٢) د (س) = { س^{٢} ، س > ٣   عند س = ٣
٣ س^{٢} س ≥ ٣ }

(٣) هـ (س) = { ٣ – س^{٢} ، –٢ ≥ س > ١ في الفترة [–٢ ، ٢]
س + ١ ، ١ ≥ س ≥ ٢ }

(٤) د (س) = { $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س} + ٦}{\text{س} - ٢}$ س ≠ ٢   عند س = ٢
٠ ، س = ٢ }

(٥) ل (س) = { $\frac{\text{س}^{٢} - ٢٥}{\text{س} - ٥}$ ، س ≠ ٥   عند س = ٥
٣ س – ٥ ، س = ٥ }

(٦) $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\text{جا٢س} - \text{جتا س}}{\text{س}} & \text{س} \neq ٠ \\ \dfrac{١}{٢} & \text{س} = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٧) $\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{٣س} - ٢} - \sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} - ٢} & \text{س} \neq ٢ \\ ٣ & \text{س} = ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

(٨) ضع قيمة ك التي تجعل الدالة التالية متصلة عند −٢ =

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{جتا ٢س} - ١ & \text{س} \neq ٠ \\ \text{ك} & \text{س} \neq ٠ \end{cases}$

(٩) أعد تعريف الدالة التالية بحيث تكون متصلة عند س = ٣

$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\text{٢س} + ٣}}{\text{س} - ١} \end{cases}$

الوحدة الثانية

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

التفاضل

أهداف الوحدة الثانية

بعد دراسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن :-

١- يتعرف التغير .

٢- يتعرف متوسط معدل التغير .

٣- يتعرف مشتقة الدالة .

٤- يجد مشتقة الدالة من المبادئ الأولية .

٥- يجد المشتقة الأولى للدالة الثابتة .

٦- يجد المشتقة الأولى للدلة ص = $س^ن$

٧- يجد المشتقة للدوال المثلثية – الجيب وجيب التمام .

٨- يتعرف مشتقة مجموع أو فرق دالتين .

٩- يتعرف مشتقة حاصل ضرب دالتين .

١٠- يتعرف مشتقة حاصل قسمة دالتين .

١١- يتعرف مشتقة دالة الدالة .

١٢- يتعرف إشتقاق الدوال المعرفة ضمنياً .

١٣- يتعرف المشتقات العليا .

(٢) التفاضل

(٢ – ١) التغير ومتوسط معدل التغير :

في هذا الفصل سنهتم بمعالجة مسألة إيجاد ما يسمى بمعدل التغير ، مثل معدل التغير في المسافة التى يقطعها صاروخ بالنسبة إلى الزمن عند نقطة معينة في الفضاء ، أو معدل الزيادة في المساحة السطحية لقرص يتمدد بالحرارة بالنسبة إلى نصف قطره ، أو معدل التغير في إنتاج سلعة بالنسبة لعدد المشتغلين بصناعة هذه السلعة . في كل هذه الأمثلة وغيرها نفترض معرفتنا للدالة التى تربط بين المتغيرين المذكورين ، بين المسافة والزمن ، و بين مساحة سطح القرص ونصف قطره ، و بين الإنتاج وعدد العمال وهكذا .

وبصورة عامة نفرض أن ص = د (س) وأن س تغيرت من $س_١$ إلى $س_٢$ تبعاً لذلك تتغير ص من $ص_١$ = د ($س_١$) إلى $ص_٢$ = د ($س_٢$) . ونقول إن س قد طرأ عليها تغير بمقدار $س_٢ - س_١$ ، ونرمز له بـــ Δ س (دلتا س) وتبعاً لذلك تغيرت ص بمقدار $ص_٢ - ص_١$ ، ونرمز له بـــ Δ ص . أى :

Δ س = $س_٢ - س_١$.

Δ ص = $ص_٢ - ص_١$ = د ($س_٢$) – د ($س_١$)

بكتابة $س_٢ = س_١ + \Delta$ س فإن :

Δ ص = د ($س_١ + \Delta$ س) – د ($س_١$) ولكل س يمكن حساب التغير في ص بـــ :

Δ ص = د (س + Δ س) – د (س) .

متوسط معدل التغير :

يعرف متوسط معدل تغير الدالة ص = د (س) إذا تغيرت س من س إلى س + Δ س بـــ :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د\,(س + \Delta س) - د\,(س)}{\Delta س} \qquad \Delta س \neq ٠$$

مثال (١) :

احسب متوسط معدل التغير للدالة ص = د (س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$

عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٢١ .

الحل :

Δ ص = د (س + Δ س) – د (س)

س = ٣ ، Δ س = ٣,٢١ – ٣ = ٠,٢١

$\therefore$ Δ ص = د (٣,٢١) – د (٣) = $\sqrt{٣,٢١ - ٢}$ – $\sqrt{٣ - ٢}$

= $\sqrt{١,٢١}$ – $\sqrt{١}$ = ١,١ – ١ = ٠,١

$$\therefore \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{٠,١}{٠,٢١} = \frac{١٠}{٢١} \approx ٠,٤٧٦$$

مثال (٢) :

تتمدد صفيحة دائرية بالتسخين . احسب متوسط معدل التغير في مساحتها عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ سم إلى ٦,١ سم .

الحل :

نفرض أن طول نصف القطر = نق

مساحة الصفيحة م = د (نق) = π نق^{٢}

$$\frac{\Delta \text{م}}{\Delta \text{نق}} = \frac{\text{د} (٦,١) - \text{د} (٦)}{٦,١ - ٦} = \frac{\pi [(٦,١)^{٢} - ٦^{٢}]}{٠,١}$$

$$= \frac{\pi (٦,١ - ٦) (٦,١ + ٦)}{٠,١} = \frac{\pi \times ٠,١ \times ١٢,١}{٠,١}$$

= ١٢,١ π

تمرين (٢ – ١)

(١) جد متوسط معدل التغير للدوال المذكورة .

أ • د (س) = ٢ س – ١ عندما تتغير س من ٣ إلى ٣,٤ .

ب• د (ر) = $\sqrt{ر + ٣}$ عندما تتغير ر من ٠ إلى –٢ .

جـ• د (س) = $س^٣$ – ١ عندما تتغير س من ٠ إلى $\frac{١}{٢}$

(٢) يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث يكون بعده ف عن نقطة ثابتة بعد ن ثانية معطى بالعلاقة :

$$ف = ن^٢ - ٢ ن + ٥$$

احسب سرعته المتوسطة (أى متوسط تغير ف بالنسبة لــ ن) خلال التغير من ن = ١ ث إلى ن = ٣ ث .

(٣) فقاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروي . احسب متوسط معدل التغير في مساحة السطح الكروي للفقاعة عندما يتغير طول نصف قطرها من ٦ مم إلى ٦,٢ مم . (مساحة سطح الكرة بدلالة نصف قطرها نق تساوى ٤π $نق^٢$) .

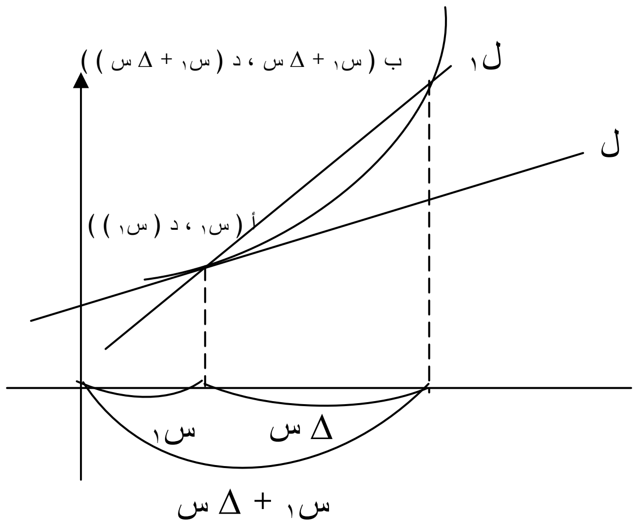
(٢ – ٢) مشتقه الدالة :

نمهد للمشتقة بالمسألة الهندسية التالية :

جد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند النقطة ($س_١$ ، د ($س_١$)) . من دراستنا للهندسة الإحداثية عرفنا أن ميل المستقيم الواصل بين أي نقطتين يساوي فرق الإحداثيين الصاديين للنقطتين مقسوماً على فرق الإحداثيين السينيين لهما ميزات الترتيب. إذن :

ميل الوتر $ل_١$ الواصل بين النقطتين أ($س_١$ ، د ($س_١$)) و ب ($س_١$+Δ س، د ($س_١$ + Δ س)) يساوي :

$$\frac{د(س_١+\Delta س) - د(س_١)}{س_١+\Delta س - س_١} = \frac{د(س_١+\Delta س) - د(س_١)}{\Delta س}$$



الشكل (٢ – ٢)

فإذا تحركت ب نحو أ اقترب الوتر ل١ شيئاً فشيئاً من المماس ل لمنحنى ص = د (س) عند أ (س١ ، د (س١)) ومن ثم يقترب المقدار :

$$\frac{د\,(س_١ + \Delta س) - د\,(س_١)}{\Delta س}$$ نحو ميل المماس للمنحنى عند

أ (س١ ، د (س١)) إذاً ميل المماس عند س = س١ هو النهاية التى يستقر عندها المقدار :

$$\frac{د\,(س_١ + \Delta س) - د\,(س_١)}{\Delta س}$$ كلما اقتربت ب من أ (أى كلما اقتربت Δ س من الصفر) .

إذن ميل المماس لمنحنى الدالة ص= د(س) عند س = س١ هو النهاية.

$$\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{د\,(س_١ + \Delta س) - د\,(س_١)}{\Delta س}$$

بفرض وجود تلك النهاية .

بما أن $س_1$ أى نقطة في نطاق تعريف الدالة ص = د (س) فإن النهاية.

$$\lim_{\Delta س \to 0} \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$$

ان وجدت ، تعنى هندسياً ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د (س) عند س ويسمى بالمشتقة الأولى للدالة ص بالنسبة س ، ويرمز للمشتقة بـــ :

$$ص' \text{ أو } \frac{د ص}{د س} \text{ أو } د'(س) \text{ أو } \frac{د}{د س}(د(س))$$

وتسمى أيضاً بالمعامل التفاضلي الأول لـــ ص بالنسبة لـــ س وتسمى بمعدل تغير ص بالنسبة لـــ س .
إذن نكتب :

$$د'(س) = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$$

سنتطرق لاحقاً إلى قواعد أساسية لإيجاد المشتقات الأولى للدوال المختلفة غير أنه يمكن إيجاد المشتقات مباشرة من التعريف وذلك بما يعرف بإيجاد المشتقة من المبادئ الأولية .

مثال (١) :
جد المشتقة الأولى للدالة ص = $س^2$ من المبادئ الأولية ، ثم جد قيمتها العددية عند س = ٣ ، ماذا يعنى ذلك هندسياً ؟

الحل :

$$ص = د(س) = س^2$$

$$د'(س) = \lim_{\Delta س \to 0} \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س}$$

وبما أن $د(س) = س^2$

$\therefore$ د (س + Δ س) = (س + Δ س)^{٢}

$$\therefore د'(س) = \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{(س + \Delta س)^{٢} - س^{٢}}{\Delta س}$$

$$= \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{س^{٢} + ٢ س \Delta س + (\Delta س)^{٢} - س^{٢}}{\Delta س}$$

$$= \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{٢ س \Delta س + (\Delta س)^{٢}}{\Delta س}$$

$$= \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} \frac{\Delta س (٢ س + \Delta س)}{\Delta س}$$

$$= \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نها} (٢ س + \Delta س)$$

وبما أن Δ س $\leftarrow$ ٠

$\therefore$ د$'$ (س) = ٢ س ، عند س = ٣

$\therefore$ د$'$ (٣) = ٢ × ٣ = ٦

هندسياً تعنى ان ميل المماس لمنحنى الدالة ص = س^{٢} عند النقطة (٣ ، ٩) هو ٦ .

مثال (٢) :

إذا كان ص = $\frac{١}{س}$ فجد $\frac{د ص}{د س}$ من المبادئ الأولية .

الحل :

$$ص = \frac{١}{س}$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د (س + \Delta س) - د (س)}{\Delta س}$$

$$= \frac{\frac{1}{\text{س} + \Delta\text{س}} - \frac{1}{\text{س}}}{\Delta\text{س}}$$

$$= \frac{\text{س} - (\text{س} + \Delta\text{س})}{(\Delta\text{س})\,\text{س}\,(\text{س} + \Delta\text{س})}$$

$$= \frac{-\Delta\text{س}}{(\Delta\text{س})\,\text{س}\,(\text{س} + \Delta\text{س})}$$

$$= -\frac{1}{\text{س}\,(\text{س} + \Delta\text{س})}$$

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \underset{\Delta\text{س} \to 0}{\text{نها}} \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \underset{\Delta\text{س} \to 0}{\text{نها}} \left(-\frac{1}{\text{س}\,(\text{س} + \Delta\text{س})} \right)$$

$$= \frac{-1}{\text{س}^2}$$

تمرين (٢ – ٢)

جد المشتقات الأولى للدوال التالية من المبادئ الأولية :

(١) ص = ٥ – ٣ س

(٢) ص = $\text{س}^2 - 2$

(٣) ص = (س + ١) (س – ٤)

(٤) ص = $\frac{1}{(2\text{س} + 5)^2}$

(٥) ص = $\frac{جـ}{س^{٢} + ٣}$ ، جـ ثابت

(٦) ع = $\frac{١}{ن^{٢}} + \frac{١}{٤ ن}$

(٢ – ٣) إيجاد المشتقة الأولى لبعض الدوال :

(أ) الدالة الثابتة ص = أ (أ ثابت) :

ص = د (س) = أ

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د (س + \Delta س) - د (س)}{\Delta س}$$

$$= \frac{أ - أ}{\Delta س} = \frac{٠}{\Delta س} = صفر$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = نها_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = صفر$$

$$\therefore \frac{د}{د س} (أ) = ٠$$

(ب) الدالة ص = $س^{ن}$ (ن عدد صحيح ثابت) :

ص = د (س) = $س^{ن}$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د (س + \Delta س) - د (س)}{\Delta س}$$

$$= \frac{(س + \Delta س)^{ن} - س^{ن}}{\Delta س}$$

$$= \frac{(س + \Delta س)^{ن} - س^{ن}}{(س + \Delta س) - س}$$

ضع ع = س + Δ س . إذن ع ← س عندما Δ س ← ٠

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \text{ن س}^{\text{ن} - ١}$$

$\therefore$

إذا كان ص = س$^{\text{ن}}$

فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ن س}^{\text{ن} - ١}$

(٢ – ٤) المشتقة الأولى للدوال المثلثية

وبما أن نها $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{}$ $\frac{\text{س}^{\text{ن}} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{س} - \text{أ}} = \text{ن أ}^{\text{ن} - ١}$

صحيحة لجميع قيم ن الصحيحة والكسرية والسالبة والموجبة فإنه إذا كان ص = س$^{\text{ن}}$ فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{ن س}^{\text{ن} - ١}$ لجميع قيم ن الصحيحة والكسرية والموجبة والسالبة.

(جـ) الدالة ص = أ د(س) ، أ ثابت :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{أ د (س + } \Delta \text{ س) – أ د (س)}}{\Delta \text{س}}$$

$$\therefore \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{أ د (س + } \Delta \text{ س) – أ د (س)}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \text{أ} \underset{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{د (س + } \Delta \text{ س) – د (س)}}{\Delta \text{س}}$$

$$= \text{أ د}' \text{(س)}$$

أى أن مشتقة حاصل ضرب الثابت في الدالة يساوى حاصل ضرب الثابت في مشتقة الدالة

فإذا كان ص = أ $س^{ن}$

فإن $\frac{د ص}{د س}$ = أ ن $س^{ن-1}$

مثلاً : إذا كان ص = ٥$س^{7}$ فإن

$\frac{د ص}{د س}$ ٣٥ $س^{6}$

(د) الدالة ص = جا س :

ص = د (س) = جا س

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د (س + \Delta س) - د (س)}{\Delta س}$$

$$= \frac{جا (س + \Delta س) - جا س}{\Delta س}$$

$$= \frac{2 \,جتا \frac{2 س + \Delta س}{2} \,جا \frac{\Delta س}{2}}{\Delta س}$$

$$= جتا (س + \frac{\Delta س}{2}) \frac{جا \frac{\Delta س}{2}}{\frac{\Delta س}{2}}$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \lim_{\Delta س \to 0} جتا (س + \frac{\Delta س}{2}) \lim_{\Delta س \to 0} \frac{جا \frac{\Delta س}{2}}{\frac{\Delta س}{2}}$$

= جتا س × ١ = جتا س

لأنه بوضع ع = $\frac{\Delta \text{س}}{٢}$ فإن :

$$\lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}\ \frac{\Delta \text{س}}{٢}}{\frac{\Delta \text{س}}{٢}} = \lim_{\text{ع} \to ٠} \frac{\text{جا ع}}{\text{ع}} = ١$$

$$\boxed{\text{إذا كان ص = جا س فإن } \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{جتا س}}$$

(هـ) الدالة ص = جتا س :

أما إذا كانت ص = د (س) = جتا س

فإن $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{جتا}\ (\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{جتا س}}{\Delta \text{س}}$

$$= \frac{-٢\ \text{جا}\ \frac{٢\text{س} + \Delta \text{س}}{٢}\ \text{جا}\ \frac{\Delta \text{س}}{٢}}{\Delta \text{س}}$$

$$= -\ \text{جا}\ (\text{س} + \frac{\Delta \text{س}}{٢})\ \frac{\text{جا}\ \frac{\Delta \text{س}}{٢}}{\frac{\Delta \text{س}}{٢}}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \left(-\ \text{جا}\ (\text{س} + \frac{\Delta \text{س}}{٢})\right) \lim_{\Delta \text{س} \to ٠} \frac{\text{جا}\ \frac{\Delta \text{س}}{٢}}{\frac{\Delta \text{س}}{٢}}$$

$$= -\ \text{جا س} \times ١ = -\ \text{جا س}$$

إذا كان ص = جتا س فإن $\frac{د ص}{د س}$ = − جا س

تمرين (٢ – ٣)

جد قيمة $\frac{د ص}{د س}$ في كل من الحالات التالية :

(١) ص = −٧

(٢) ص = $س^{٥}$

(٣) ص = $\sqrt{س}$

(٤) ص = ٥ $س^{\frac{١}{٥}}$

(٥) ص = ٣ جتا س

(٦) ص = $\frac{٧}{س^{٤}}$

(٧) ص = ٢$س^{-٣}$

(٨) ص= $\frac{١}{\sqrt{س}}$

(٢ - ٤) القواعد الأساسية للتفاضل :

(أ) مشتقة مجموع أو فرق الدالتين :

لتكن كل من ل ، ع دالتين في المتغير س

د ص = ل ± ع

فإذا تغيرت س بمقدار Δ س فإن كلاً من ص ، ل ، ع تتغير بمقدار Δ ص ، Δ ل ، Δ ع على الترتيب

∴ ص + Δ ص = (ل + Δ ل) ± (ع +Δ ع)

$$\Delta ٢\ \text{ص} = \Delta\ \text{ل} \pm \Delta\ \text{ع}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta\ \text{س}} \qquad \frac{\Delta\ \text{ل}}{\Delta\ \text{س}} \qquad \frac{\Delta\ \text{ع}}{\Delta\ \text{س}}$$

بأخذ النهايات عندما Δ س $\longleftarrow$ ٠

$$\text{نها}_{\Delta \text{س} \leftarrow ٠} \frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta\ \text{س}} = \text{نها}_{\Delta \text{س} \leftarrow ٠} \frac{\Delta\ \text{ل}}{\Delta\ \text{س}} \pm \text{نها}_{\Delta \text{س} \leftarrow ٠} \frac{\Delta\ \text{ع}}{\Delta\ \text{س}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ل}}{\text{د س}} \pm \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$$

أى المشتقة الأولى بمجموع أو فرق الدالتين يساوى مجموع أو فرق مشتقتي الدالتين.

ويمكن تعميم ذلك بأن :

المشتقة الأولى للمجموع أو الفرق لأي عدد من الدوال يساوى المجموع أو الفرق لمشتقات تلك الدوال.

(ب) مشتقة حاصل ضرب الدالتين :

إذا كانت كل من ل ، ع دالتين في المتغير س وكان ص = ل ع

وتغيرت س الي س + Δ س فإن ص تتغير إلى ص + Δ ص

و ل تتغير إلى ل + Δ ل ، و ع تتغير إلى ع + Δ ع

ويكون : ص + Δ ص = (ل + Δ ل) (ع+ Δ ع)

$$= \text{ل ع} + \text{ل}\ \Delta\ \text{ع} + \text{ع}\ \Delta\ \text{ل} + \Delta\ \text{ل}\ \Delta\ \text{ع}$$

$$\therefore \quad \Delta\ \text{ص} = \text{ل}\ \Delta\ \text{ع} + \text{ع}\ \Delta\ \text{ل} + \Delta\ \text{ل}\ \Delta\ \text{ع}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta\ \text{س}} = \text{ل} \frac{\Delta\ \text{ع}}{\Delta\ \text{س}} + \text{ع} \frac{\Delta\ \text{ل}}{\Delta\ \text{س}} + \Delta\ \text{ل} \frac{\Delta\ \text{ع}}{\Delta\ \text{س}}$$

وبأخذ النهايات عندما Δ س $\leftarrow$ ٠

$$\text{نها}_{\Delta \text{س} \leftarrow ٠} \frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta\ \text{س}} = \text{نها}_{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}\ \text{ل} \frac{\Delta\ \text{ع}}{\Delta\ \text{س}} + \text{نها}_{\Delta \text{س} \leftarrow ٠}\ \text{ع} \frac{\Delta\ \text{ل}}{\Delta\ \text{س}} + \text{نها}_{\Delta \text{س} \leftarrow ٠} \Delta\ \text{ل} \frac{\Delta\ \text{ع}}{\Delta\ \text{س}}$$

$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = ل \lim\limits_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ع}{\Delta س} + ع \lim\limits_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ل}{\Delta س} + \lim\limits_{\Delta س \to ٠} \Delta ل \lim\limits_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ع}{\Delta س}$

$= ل \quad \frac{٢ ع}{٢ س} \quad + ع \quad \frac{٢ ل}{٢ س} \quad + ٠$ لأن $\lim\limits_{\Delta س \to ٠} \Delta ل = ٠$

مثال (١) :

جد $\frac{د}{د س} \left(س^{٥} - ٤ س^{٢} + ٢ س + ٤ \right)$

الحل :

$\frac{د}{د س} \left(س^{٥} - ٤ س^{٢} + ٢ س + ٤ \right)$

$= \frac{د}{د س} س^{٥} - \frac{د}{د س} ٤ س^{٢} + \frac{د}{د س} ٢ س + \frac{د}{د س} ٤$

$= ٥ س^{٤} - ٨ س + ٢ +$ صفر

$\boxed{\frac{د (ل ع)}{د س} = ل \frac{د ع}{د س} + ع \frac{د ل}{د س}}$ وهو المطلوب

يحفظ تفاضل حاصل ضرب دالتين بأنه : الأولى × مشتقه الثانية + الثانية × مشتقه الأولى

نشاط :

جد: $\frac{د}{د س}(س^{٥} \times س^{٣})$ باستخدام القاعدة السابقة ، ثم جد $\frac{د}{د س} س^{٨}$

ماذا تلاحظ ؟

مثال (٢) :

جد : $\frac{د}{د س} \left(٥ س^{٣} - ٢ س \right) (جا س)$

الحل :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{٥ س}^{٣} - \text{٢ س}\right)\left(\text{س}^{٤} - \text{٣ س}^{٢}\right)$$

$$= \left(\text{٥ س}^{٣} - \text{٢س}\right) \times \frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{جا س}\right) +$$

$$\left(\text{جا س}\right) \frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{٥س}^{٣} - \text{٢س}\right)$$

$$= \left(\text{٥ س}^{٣} - \text{٢ س}\right)\left(\text{جتا س}\right) + \left(\text{جتا س}\right)\left(\text{١٥س}^{٢} - ٢\right)$$

$$= \left(\text{٥ س}^{٣} - \text{٢ س}\right)\text{جتا س} + \left(\text{١٥س}^{٢} - ٢\right)\text{جا س}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\frac{\text{ل}}{\text{ع}}\right) = \frac{\text{ع}\,\frac{\text{د ل}}{\text{د س}} - \text{ل}\,\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}}{\text{ع}^{٢}}}$$ وهو المطلوب .

تحفظ مشتقة خارج قسمة دالتين بـــ :

$$\frac{\textbf{المقام × مشتقه البسط – البسط × مشتقه المقام}}{\textbf{مربع المقام}}$$

نشاط : جد $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\frac{\text{س}^{٥}}{\text{س}^{٣}}\right)$ من القاعدة السابقـــة ثم جـــد $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{س}^{٢}\right)$

ماذا تلاحظ ؟

مثال (١) :

جد : $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left[\frac{\text{س}^{٣} - ٤}{\text{٣ س}^{٢} + ٥}\right]$

الحل : $\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left[\frac{\text{س}^{٣} - ٤}{\text{٣ س}^{٢} + ٥}\right]$

$$= \frac{(٣س^٢ + ٥)(٣س^٢) - (س^٣ - ٤)(٦س)}{(٣س^٢ + ٥)^٢}$$

أكمل الحل

مثال (٢) :

أثبت أن : $\frac{د}{د س}$ (ظا س) = قا^٢ س

الحل :

ضع ص = ظا س = $\frac{جا س}{جتا س}$

بتفاضل خارج قسمة دالتين

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{جتا س \frac{د}{د س}(جا س) - (جا س) \frac{د}{د س}(جتا س)}{جتا^٢ س}$$

$$= \frac{جتا س جتا س - جا س (- جا س)}{جتا^٢ س}$$

$$= \frac{جتا^٢ س + جا^٢ س}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا^٢ س} = قا^٢ س$$

نشاط :

أثبت أن :

(١) $\frac{د}{د س}$ (قا س) = ظا س قا س

(٢) $\frac{د}{د س}$ (ظتا س) = − قتا^٢ س

(٣) $\frac{\text{د}}{\text{د س}} \left(\text{قتا س} \right) = - \text{ظتا س قتا س}$

تمرين (٢ – ٤)

جد قيمة $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ في كل من الحالات التالية :

(١) $\text{ص} = \text{س}^{٤} + ٣\,\text{س}^{٢} + ٥$

(٢) $\text{ص} = ٥\,\text{س}^{٣} + ٢\,\text{س}^{٢} + \text{س} + ١$

(٣) $\text{ص} = ١ + \text{س} + \text{جا س}$

(٤) $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}} + ٥\,\text{جا س}$

(٥) $\text{ص} = \frac{\text{س}}{١ + \text{جا س}}$

(٦) $\text{ص} = \text{س}^{٢}\,\text{جا س}$

(٧) $\text{ص} = \frac{٢\,\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$

(٨) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٥\,\text{س}}$

(٩) $\text{ص} = \left(\text{جا س} + ٢ \right) \left(\text{س}^{٢} - \text{س} \right)$

(١٠) $\text{ص} = \frac{٣\,\text{س}^{٢}}{\text{س} + ١}$

(١١) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٥} - \text{س}^{٤} + ٣\,\text{س}^{٢}}{٢\text{س} + ٧}$

(١٢) $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س}^{٢} + ١}$

(١٣) ص = جا س + جتا س

(١٤) ص = $س^{٣}$ جا س

(١٥) ص = $\frac{٣ + ٤ \text{ جا س}}{٤ + ٣ \text{ جا س}}$

(١٦) ص = $\frac{١ - \text{جا س}}{١ + \text{جتا س}}$

(١٧) إذا كان ص = جا س جتا س أثبت أن $\frac{د ص}{د س}$ = جتا ٢ س

(٢ – ٥) دالة الدالة :

لتكن ص = د (ل) دالة في المتغير ل ، و ل = ر (س) دالة في المتغير س . عليه فإن

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \cdot \frac{د ل}{د س}$$

البرهان :

إذا تغيرت س إلى س + Δ س فإن ل تتغير إلى ل + Δ ل وتبعاً لذلك تتغير ص إلى ص + Δ ص .

$$\frac{Δ ص}{Δ س} = \frac{Δ ص}{Δ ل} \cdot \frac{Δ ل}{Δ س}$$

$$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = \lim_{Δ س \leftarrow ٠} \frac{Δ ص}{Δ س}$$

$$= \lim_{Δ ل \leftarrow ٠} \frac{Δ ص}{Δ ل} \cdot \lim_{Δ س \leftarrow ٠} \frac{Δ ل}{Δ س}$$ (لأن Δ ل ← ٠ عندما Δ س ← ٠)

$$= \frac{د ص}{د ل} \cdot \frac{د ل}{د س}$$

مثال (١) :

جد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان :

(١) ص = $(٥ س^{٢} + ٧)^{\frac{٣}{٢}}$

(٢) ص = جا $س^{٢}$

الحل :

(١) ضع ل = ٥ $س^{٢}$ + ٧

إذن ص = $ل^{\frac{٣}{٢}}$

عليه فإن ص دالة في ل و ل دالة في س وهذا تركيب لدالة دالة .

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \cdot \frac{د ل}{د س}$$

$$= \frac{٣}{٢} ل^{\frac{١}{٢}} (١٠ س)$$

$$= \frac{٣}{٢} (٥ س^{٢} + ٧)^{\frac{١}{٢}} (١٠ س)$$

$$= ١٥ س (٥ س^{٢} - ٧)^{\frac{١}{٢}}$$

(٢) ضع ل = $س^{٢}$

$\therefore$ ص = جا ل

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \cdot \frac{د ل}{د س}$$

$$= جتا ل (٢ س)$$

$$= ٢ س جتا س^{٢}$$

تلاحظ في المثال السابق أنه يتم تفاضل القوس دون النظر لما في داخله ويضرب في تفاضل ما بداخل القوس ، هذا في المسألة الأولى ، أمّا في الثانية فقد تم تفاضل الجيب دون النظر للزاوية $س^2$ ثم ضرب في تفاضل الزاوية .

مثال (٢) :

جد $\frac{د}{د س}$ جا (أ س + ب)

الحل :

$$\frac{د}{د س} = \text{جتا} (أ س + ب) \times \frac{د}{د س} (أ س + ب)$$

$$= أ \text{ جتا} (أ س + ب)$$

باستخدام المثال السابق وبوضع أ = −١ ، ب = $\frac{\pi}{٢}$ نستطيع الحصول على $\frac{د}{د س}$ (جتا س) وذلك باتباع الآتى :

البرهان :

$$ص = \text{جتا } س = \text{جا } \left(\frac{\pi}{٢} - س \right)$$

$$\frac{د ص}{د س} = \text{جتا} \left(\frac{\pi}{٢} - س \right) \times \frac{د}{د س} \left(\frac{\pi}{٢} - س \right)$$

$$= - \text{جتا} \left(\frac{\pi}{٢} - س \right) = - \text{جا } س$$

وهى النتيجة التى حصلنا عليها سابقاً .

تمرين (٢ – ٥)

(١) جد مشتقات الدوال التالية :

(أ) $ص = (٢ س^٢ + ٣)^٥$

(ب) $ص = \left(٢س - \frac{١}{س^٣} \right)^{\frac{١}{٢}}$

(جـ) $\text{ص} = (١ + ٢\,\text{س} - \text{س}^{٢})^{٣}$

(د) $\text{ص} = \text{حا}^{٢}\,\text{س}$

(هـ) $\text{ص} = \sqrt{\dfrac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{جا س}}}$

(و) $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}}$

(ز) $\text{ص} = \text{جا}(\text{س}^{٣} + \text{س})$

(ح) $\text{ص} = \sqrt{\dfrac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}}$

(٢) إذا كان ص داله في ل ، ل داله في ع و ع داله في س أثبت أن :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{\text{د ص}}{\text{د ل}} \cdot \frac{\text{د ل}}{\text{د ع}} \cdot \frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$$ ومن ثم جد :

(أ) $\dfrac{\text{د}}{\text{د س}} \left[\text{جا}^{٢} (\text{س}^{٥} + ٥) \right]$

(ب) $\dfrac{\text{د}}{\text{د س}} \left(\text{ظا} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣} \right)$

(٢ – ٦) تفاضل (اشتقاق) الدوال المعرفة ضمنياً :

في كل ما سبق من دوال نرى أن المتغير التابع الذي يعرف الدالة يكتب مباشرة بدلالة المتغير المستقل وتسمى الدالة في هذه الحالة دالة صريحة. لكن في كثير من الأحيان يمكن أن يرتبط المتغيران بصورة غير مباشرة ، في هذه الحالة نقول إنه يمكن تعريف متغير كداله في الآخر ضمنياً وتسمى الدالة في هذه الحالة دالة معرفة ضمنياً. مثال لدالة ضمنية :

$$\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} = \text{جا ص} + \text{س}$$

ماذا تفعل لإيجاد $\frac{د ص}{د س}$ بالنظر لــ ص كداله في المتغير س ، في مثل قاعدة هذه الدالة.

لنفرض أن ص = د(س) ، عليه فإن أى داله ر (ص) في ص يمكن النظر لها كداله في س وباستخدام قاعدة دالة الدالة فإن :

$$\frac{د}{د س} (ر (ص)) = ر' (ص) \frac{د ص}{د س}$$

إذن يمكن كتابة :

$$\frac{د}{د س} ص^{ن} = ن ص^{ن - ١} \frac{د ص}{د س}$$

$$\frac{د}{د س} جا ص = جتا ص \frac{د ص}{د س}$$

وهكذا .

مثال (١) :

جد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كان س + ص^{٢} = ٥ س ص

الحل :

تفاضل كل الحدود بالنسبة لــ س لنحصل على :

$$١ + ٢ ص \frac{د ص}{د س} = ٥ [س \frac{د ص}{د س} + ص]$$

إذن :

$$\frac{د ص}{د س} [٢ ص - ٥ س] = ٥ ص - ١$$

$$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = \frac{٥ ص - ١}{٢ ص - ٥ س}$$

مثال (٢) :

جد $\frac{د\, ص}{د\, س}$ إذا كان $ص^٢ + س^٢ = ٤$

الحل :

$$٢\, ص \;\; \frac{د\, ص}{د\, س} \; + ٢\, س = صفر$$

$$\therefore \;\; \frac{د\, ص}{د\, س} = - \frac{س}{ص}$$

مثال (٣) :

جد $\frac{د\, ص}{د\, س}$ إذا كان $ص = ظا^{-١}\, س$ (الزاوية التى ظلها س)

الحل :

إذا كانت $ص = ظا^{-١}\, س$ فإن $س = ظا\, ص$

بتفاضل الطرفين بالنسبة لــ س نحصل على :

$$١ = قا^٢\, ص \;\; \frac{د\, ص}{د\, س}$$

$$\therefore \;\; \frac{د\, ص}{د\, س} = \frac{١}{قا^٢\, ص}$$

لإيجاد ذلك بدلالة س ، لاحظ أن :

$قا^٢\, ص = ١ + ظا^٢\, ص = ١ + س^٢$

$$\therefore \;\; \frac{د\, ص}{د\, س} = \frac{١}{١ + س^٢}$$

تمرين (٢ – ٦)

جد $\frac{د\,ص}{د\,س}$ في كل من الدوال التالية :

(١) $٣\,س + ٤\,ص = ٦$

(٢) $٤\,س^{٢} + ٣\,س\,ص = ٠$

(٣) $س + \sqrt{ص} = جا\,ص$

(٤) $س = س^{٢} + ص^{٣}$

(٥) $س + ص\,ظا\,س = ٠$

(٦) $س^{٢} + ص^{٢} = س\,ص$

(٧) $س^{٤} + ١ = س + ص^{٢}$

(٨) $س^{٣} + ص^{٣} - ٤\,س\,ص = ٠$

(٩) $\frac{١}{ص} + \frac{١}{س} = ١$

(١٠) $ص = جا\,(\,س\,ص\,)$

(١١) $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ١$

(١٢) $ص = \frac{جا\,س}{جتا\,س + ١}$

(١٣) $جا\,س + جتا\,ص = ٠$

(١٤) $س\,جتا\,ص = جا\,(\,س + ص\,)$

(١٥) إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} - ٢\,س - ٤\,ص = ٥$ فجد $\frac{د\,ص}{د\,س}$ عند النقطة $(\,٢ ، -١\,)$.

(١٦) إذا كان $٣\,ص\,جا\,س + ٥\,ص^{٢}\,جتا\,س - س^{٣} = ٠$ جد $\frac{د\,ص}{د\,س}$.

(١٧) جد $\frac{د\,ص}{د\,س}$ في كل مما يلي :

(أ) $\sqrt{ص} + \sqrt{س} = ٢$

(ب) $س^{٣} - ٢ س ص^{٢} + ص^{٣} = ٧$

(جـ) $(س + ص)^{٤} = س^{٤} + ص^{٤}$

(د) $قتا (س + ص) = س$

(١٨) أثبت أن :

$$\frac{د}{د س}(جا^{-١} س) = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$$

(٢ – ٧) المشتقات العليا :

لتكن ص = د (س) دالة في المتغير س ولتكن $\frac{د ص}{د س} = د'(س)$ ، المشتقة الأولى للدالة ص بالنسبة لـــ س موجودة . وإذا كانت النهاية

$$\lim_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{د'(س + \Delta س) - د'(س)}{\Delta س}$$

موجودة أيضاً .

فتسمى بالمشتقة الثانية للمتغير ص بالنسبة لـــ س ونرمز لها بالرمـــز

$د''(س)$ أو $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$

بالمثل إذا وضعنا $ص_{٢} = د''(س)$ فإن $ص_{٢}$ داله في س ، ويمكـــن ٣ تعريف مشتقتها $\frac{د ص_{٢}}{}$ بالنسبة لـــ س إذا وجدت النهاية

$$\lim_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{د''(س + \Delta س) - د''(س)}{\Delta س}$$

ونكتب :

$$\frac{د\,ص_٢}{د\,س} = د'''\,(\,س\,)$$

نسمى $د'''$ (س) بالمشتقة الثالثة لـــ ص بالنسبة لـــ س ونرمز لها أيضاً بـــ :

$$ص''' \quad أو \quad \frac{د^{٣}\,ص}{د\,س^{٣}} \quad أو \quad \frac{د^{٣}}{د\,س^{٣}}\,(\,ص\,)$$

وهكذا يمكن تعريف المشتقة ن للدالة ص بالنسبة لـــ س بـــ :

$$\frac{د^{ن}\,ص}{د\,س^{ن}} = \frac{د}{د\,س}\left(\frac{د^{ن-١}\,ص}{د\,س^{ن-١}}\right)$$

ن = ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ....

ويرمز لها أيضاً بـــ $ص^{(ن)}$.

مثال (١) :

إذا كان ص = ٦ $س^{٣}$ – ١ فجد $\frac{د^{٢}\,ص}{د\,س^{٢}}$ عند س = ٥ .

الحل :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = ١٨\,س^{٢}$$

$$\frac{د^{٢}\,ص}{د\,س^{٢}} = ٣٦\,س$$

$$\therefore \left.\frac{د^{٢}\,ص}{د\,س^{٢}}\right|_{س\,=\,٥} = ٣٦ \times ٥ = ١٨٠$$

مثال (٢) :

جد المشتقة الثالثة للدالة ص = جتا ٢ س عند س = $\frac{\pi}{٤}$

الحل :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = -\,٢\,جا\,٢\,س$$

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = -٤ \text{ جتا } ٢ \text{ س}$$

$$\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} = ٨ \text{ جا } ٢ \text{ س}$$

$$\therefore \left.\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}\right|_{س = \frac{\pi}{٤}} = ٨ \text{ جا } \frac{\pi}{٢} = ٨ \times ١ = ٨$$

مثال (٣) :

إذا كان ص = س جا س فاثبت أن :

$$س \frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} + س \frac{د ص}{د س} + ٢ \text{ ص} = ٠$$

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = \text{س جتا س + جا س}$$

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = \text{جتا س} - \text{س جا س + جتا س}$$

$$= ٢ \text{ جتا س} - \text{س جا س}$$

$$= ٢ \text{ جتا س} - \text{ص}$$

$$\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} = -٢ \text{ جا س} - \frac{د ص}{د س}$$

$$\therefore \frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} + \frac{د ص}{د س} + ٢ \text{ جا س} = ٠$$

بالضرب في س ، علماً بأن ص = س جا س فإن :

$$س \frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} + س \frac{د ص}{د س} + ٢ \text{ ص} = ٠$$ وهو المطلوب

تمرين (٢ – ٧)

(١) جد المشتقة الثانية لكل من الدوال التالية عند النقطة المبينة أمام كل منها

(أ) $\text{ص} = \text{س} + \frac{١}{\text{س}}$ عند النقطة (١ ، ٢)

(ب) $\text{ص} = \text{جا س} - \text{جتا س}$ عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٤}$

(ج) $\text{ص} = \text{س جتا ٢ س}$ عندما $\text{س} = \frac{\pi}{٢}$

(٢) إذا كان $\text{ص} = ٣\text{س}^{٤} - ٢\,\text{س}^{٣} + ٤\,\text{س}$ فجد :

$$٢\,\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} - ٥\,\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} + ٣\,\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}} \text{ عند س} = ١$$

(٣) إذا كان $\text{ص} = \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{١٢}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٦}\,\text{س}$

فجد قيم س التى يكون عندها $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} =$ صفر ثم احسب قيم $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}}$ عند هذه القيم .

(٤) إذا كان $\text{ص} = \text{جا ٣ س}$ فاثبت أن : $\frac{\text{د}^{٤}\text{ص}}{\text{د س}^{٤}}$ ١٨ص

(٥) إذا كان $\text{ص} = \frac{١}{١ + \text{س}}$ فاثبت أن $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}} + ٦\,\text{ص}^{٤} = \text{صفر}$

(٦) إذا كانت $\text{ص} = \text{س ظا س}$ فأثبت أن :

$$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = ٢\,(١ + \text{ص})\,\text{قا}^{٢}\text{س}$$

(٧) إذا كان س٢ + ص٢ = ١ ، أثبت أن :

$$\text{ص}^{٣}\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د س}^{٣}} + ١ = ٠$$

(٨) إذا كان $\text{ص} = \text{جتا س}$ أثبت أن : $\left(\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}\right)^{٢} - \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د س}^{٢}} = ١$

الوحدة الثالثة

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

تطبيقات على التفاضل

أهداف الوحدة الثالثة

بعد دارسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادرا على أن :-

١. يتعرف تطبيقات على الهندسة التحليلية .

٢. يتعرف الدوال التزايدية والتناقصية .

٣. يتعرف تطبيقات على النهائيات العظمي والصغري .

٤. يتعرف تطبيقات في الميكانيكا .

٥. يتعرف المعدلات الزمنية المرتبطة .

(٣) تطبيقات على التفاضل

(٣ – ١) تطبيقات على الهندسة التحليلية :

سبق أن أشرنا في البند (٢ – ٢) إلى المعنى الهندسى لمشتقه الدالة ص = د (س) . فميل المماس عند النقطة ($س_١$ ، د ($س_١$)) يساوى $د'$ ($س_١$) هذا يساعد كثيراً في حل بعض المسائل في الهندسة التى سبق أن اشرنا إلى بعضها في تمارين سابقة .

مثال (١) :

جد معادلة المماس لمنحنى الداله ص = $\frac{١}{س}$ عند النقطة (١ ، ١) .

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = - \frac{١}{س^٢}$$

∴ ميل المماس عند س = ١ يساوى –١

∵ ص – $ص_١$ = م (س – $س_١$) إذن معادلة المماس هى :

ص – ١ = –١ (س – ١)

أو س + ص – ٢ = صفر

مثال (٢) :

جد معادلة المماس ومعادلة العمودى على المماس لمنحنى الدالة :

ص = $س^٢$ – س + ١ عند س = ٠

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ س - ١$$

∴ ميل المماس عند النقطة (٠ ، ١) يساوى –١

∴ معادلة المماس :

ص – $ص_١$ =م (س – $س_١$)

ص – ١ = $^-$١ (س – ٠)

⇐ ص + س – ١ = ٠

ميل العمودى على المماس = ١

∴ معادلة العمودى :

$$ص - ١ = ١ \,(س - ٠)$$

$$\Leftarrow ص - س - ١ = ٠$$

مثال (٣) :

جد معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس لمنحنى الدالة :

ص = ظا س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

الحل :

$$ص = ظا\, س$$

$$\therefore \frac{د\,ص}{د\,س} = قا^{٢}س$$

عندما س = $\frac{\pi}{٤}$ ، ص = ظا $\frac{\pi}{٤}$ = ١

∴ ميل المماس عند النقطة ($\frac{\pi}{٤}$ ، ١) = قا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = $(\sqrt{٢})^{٢}$ = ٢

∴ ميل العمودي عليه : $\frac{-١}{٢}$

∴ معادلة المماس هي :

$$ص - ١ = ٢(س - \frac{\pi}{٤})$$

$$ص - ١ = ٢س - \frac{\pi}{٢}$$

$$\therefore ص - ٢س + \frac{\pi}{٢} - ١ = ٠$$

معادلة العمود عليه عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، ١)$

$$ص - ١ = \frac{-١}{٢} \left(س - \frac{\pi}{٤}\right)$$

$$ص - ١ = -\frac{١}{٢} س + \frac{\pi}{٨} \qquad ص + \frac{١}{٢} س - \frac{\pi}{٨} - ١ = ٠$$

تمرين (٣ – ١)

(١) جد ميل المماس لمنحنى الدالة د (س) = س٢ – ٣ س + ١ عند النقطة (٠ ، ١) .

(٢) جد ميل منحنى الدالة د (س) = ٣ – س عند النقطة س = ١ .

(٣) اكتب معادلة المماس والعمودى على المماس لمنحنى الدالة ص= ٣ $س^٢$ عند س = ٢ .

(٤) إذا كان المماس لمنحنى الدالة د (س) = $س^٢$ + ٥ س عند س = $س_١$ يصنع مع محور السينات الموجب زاوية قياسها ٤٥° ، جد احداثيى نقطة التماس .

(٥) جد احداثيات النقطة الواقعة على المنحنى ص = $س^٢$ + ٥ س + ٣ بحيث يكون العمودى للمماس عندها موازياً المستقيم ص = $\frac{-س + ١}{٣}$

(٦) جد معادلتي المماس والعمودي عليه لمنحنى الدالة : ص = جا س + جتا س عندما س = $\frac{٣\pi}{٤}$

(٧) جد معادلتي المماسين للمنحنى $س^٢$ + $ص^٢$ = ٥٢ الموازيين للمستقيم ٢س + ٣ص = جـ

(٨) جد معادلتي المماسين للمنحنى س ص = ٨ واللذين يوازيان المستقيم ص – ٢س = ٩

(٩) إذا كان المستقيم ١٣ س – ص – ٧ = ٠ يمس المنحنى ص = أ$س^٢$+ب $س^٢$ عند النقطة (١ ، ٦) فما قيمة أ ، ب

(١٠) جد معادلة العمودى للمنحنى :

ص = س^{٢} – س عند س = ٢ .

(١١) جد الزاوية بين المنحنيين :

د$_{١}$ (س) = س^{٢} ، د$_{٢}$ (س) = $\sqrt{\text{س}}$ عند النقطة (١ ، ١)

(٣ – ٢) النهايات العظمى والصغرى :

من اهم تطبيقات التفاضل أنه يساعد على الحصول على معلومات هامة عن سلوك الدوال التى يمكن اشتقاقها في مجال تعريفها ، وهذا يساعد بشكل خاص على ايجاد رسم تخطيطى لمنحنيات تلك الدوال .

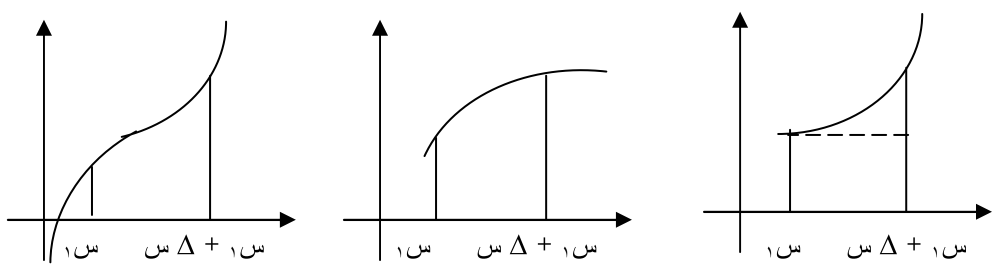
نصف الداله ص = د (س) بأنها إمّا تزايدية وإمّا تناقصية ، أو لاتزايدية ولا تناقصية ونعرف هذه الحالات رياضياً كما يلى :

(١) تزايدية :

نقول إن الداله ص = د (س) دالة تزايدية في مجال تعريفها إذا كان لكل س$_{١}$ > س$_{٢}$ د (س$_{١}$) ≤ د (س$_{٢}$) في هذه الحالة إذا كان Δ ص هو التغير الذى يحدث في الدالة ص = د (س) الذى يقابل تغير س من س$_{١}$ إلى س$_{١}$ + Δ س فإن :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{د} (\text{س}_{١} + \Delta \text{س}) - \text{د} (\text{س}_{١})}{\Delta \text{س}} \geq ٠$$

انظر الشكل (٣ – ١) .



(أ) (ب) (جـ)

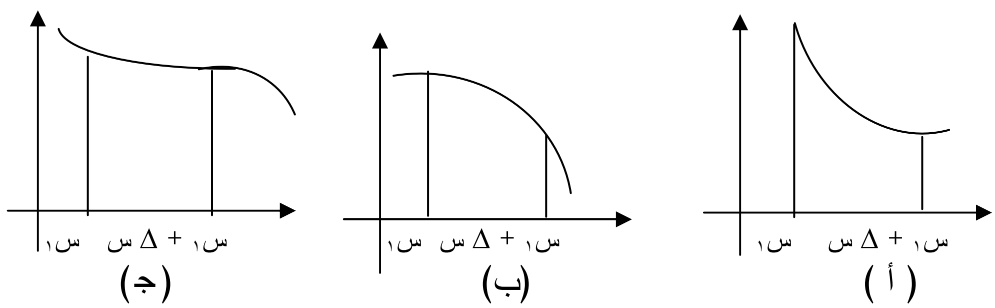
الشكل (٣ – ١)

(٢) تناقصية :

نقول إن الدالة ص = د (س) دالة تناقصية في مجال تعريفها إذا كان لكل $س_{١} < س_{٢}$ $د(س_{١}) \geq د(س_{٢})$. في هذه الحالة إذا كان Δ ص هو التغير في ص المقابل لتغير س من $س_{١}$ إلى $س_{١} + \Delta س$ فإن :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_{١} + \Delta س) - د(س_{١})}{\Delta س} \leq ٠$$

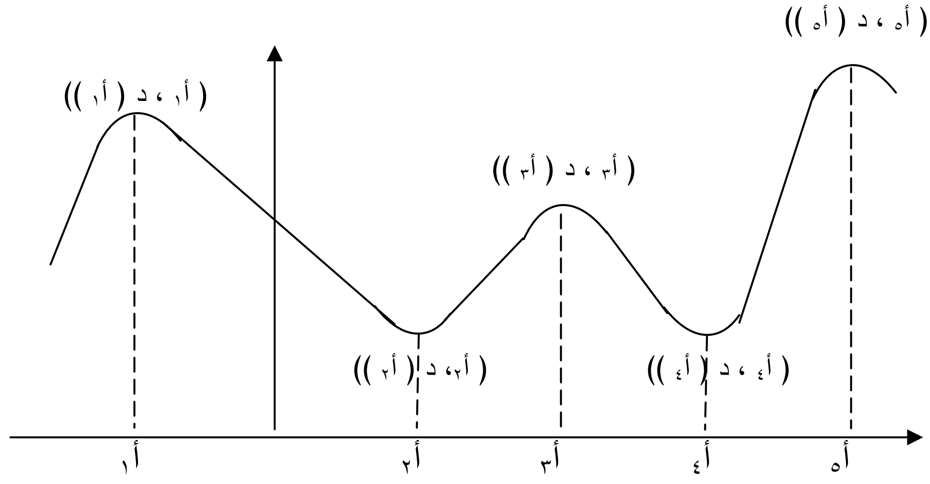
انظر الشكل (٣ – ٢) .



الشكل (٣ – ٢)

(٣) لاتزايدية ولا تناقصية :

في هذه الحالة تكون الدالة تزايدية في فترات وتناقصية في فترات أخرى ، كما هو موضح في الشكل (٣ – ٣) . ففي الشكل الدالة تزايدية .



الشكل (٣ – ٣)

في الفترات التالية :

{ س : س ≥ $أ_١$ }

{ س : $أ_٢$ ≥ س ≥ $أ_٣$ }

{ س : $أ_٤$ ≥ س ≥ $أ_٥$ }

وتناقصية في الفترات التالية :

{ س : $أ_١$ ≥ س ≥ $أ_٢$ }

{ س : $أ_٣$ ≥ س ≥ $أ_٤$ }

{ س : س ≤ $أ_٥$ }

وتمثل النقاط ($أ_١$ ، د ($أ_١$)) ، ($أ_٢$ ، د ($أ_٢$)) ، .... ، ($أ_٥$ ، د ($أ_٥$)) النهايات العظمى والصغرى للدالة في تلك الفترات. فمثلاً النقطة ($أ_٣$ ، د ($أ_٣$)) تمثل أعظم (أكبر) قيمة للدالة ص = د (س) في الفترة:

{ س : $أ_٣$ ≥ س ≥ $أ_٤$ } ، وكذلك للفترة { س : $أ_٢$ ≥ س ≥ $أ_٣$ }

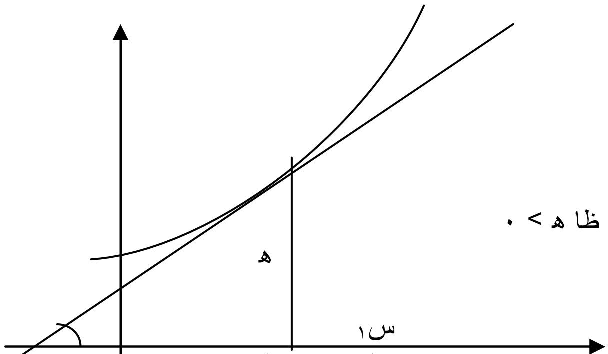
وبما أن هذه النقطة قد لاتمثل القيمة الأعظم (الأكبر) للدالة مطلقاً فإننا نسميها نهاية عظمى محلية ، حيث أنها بالتأكيد الاعظم من ضمن النقط التى تجاورها . ففى الشكل (٣ ، ٣) تسمى النقاط (أ$_{١}$ ، د (أ$_{١}$)) ، (أ$_{٣}$ ، د (أ$_{٣}$)) و (أ$_{٥}$ ، د (أ$_{٥}$)) نهايات عظمى محلية للدالة ص = د (س) ، ونقول إن للدالة ص = د (س) نهايات عظمى محلية عند س = أ$_{١}$ ، أ$_{٣}$ ، أ$_{٥}$. كما نسمى النقاط (أ$_{٢}$ ، د (أ$_{٢}$)) ، (أ$_{٤}$ ، د (أ$_{٤}$)) نهايات صغرى محلية للدالة ص = د (س) ، ونقول إن للدالة ص = د (س) نهايات صغرى محلية عند س = أ$_{٢}$ ، أ$_{٤}$.

الآن ، كيف يمكن تصنيف الدالة على كونها تزايدية أو تناقصية أو غير ذلك من مشتقتها .

إذا كانت د′ (س$_{١}$) > صفر

فهذا يعنى أن $\dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\text{د} (\text{س}_{١} + \Delta \text{س}) - \text{د} (\text{س}_{١})}{\Delta \text{س}} > ٠$

إذا كانت Δ س قريبة جداً من الصفر وذلك لأن المشتقه ليست إلا نهاية لهذه القيمة ، إذن نستنتج من ذلك أن الدالة ص = د (س) تكون تزايدية عند س$_{١}$. ويبين ذلك هندسياً بميل المماس الموجب ، حيث أنه يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . أنظر الشكل (٣ – ٤) .

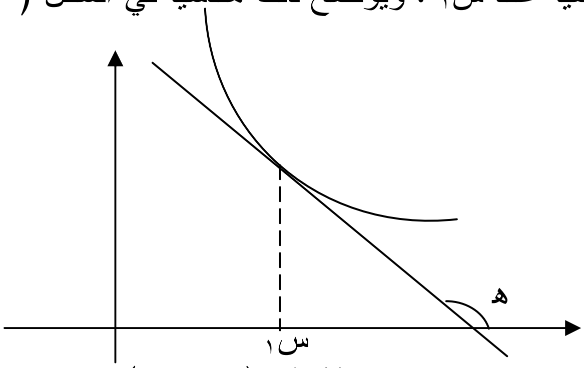


الشكل (٣ – ٤)

أمّا إذا كانت د′ (س$_{١}$) < صفر فهذا يعنى أن :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د(س_١ + \Delta س) - د(س_١)}{\Delta س} < ٠$$

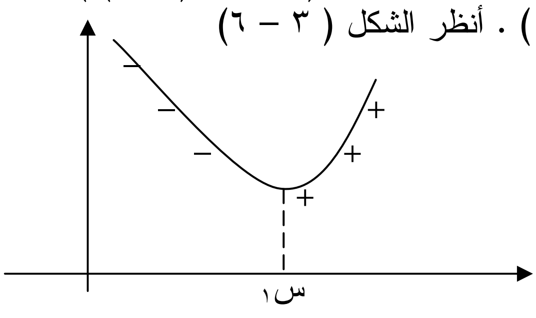
إذا كانت Δ س قريبة جداً من الصفر ويعنى ذلك أن الدالة ص = د (س) تكون تناقصية عند $س_١$. ويوضح ذلك هندسياً في الشكل (٣ – ٥) .



الشكل (٣ – ٥)

أمّا إذا كانت $د'(س_١)$ = صفر فهنالك ثلاث حالات :

الحالة الأولى: أن تكون $د'(س) < ٠$ بجوار $س_١$ إلى اليسار منها ثم تصبح $د'(س) > ٠$ بجوار $س_١$ إلى اليمين منها ونفسر $د'(س_١) = ٠$ بأنها الحالة الوسطى في الانتقال من القيم السالبة إلى الموجبة. هذه الحالة تعنى أن الدالة كانت تناقصية إلى اليسار من $س_١$ ثم تحولت إلى تزايدية إلى اليمين منها . وهذه هى الحالة التى تمثل فيها النقطة ($س_١$ ، د ($س_١$)) نهاية صغرى محلية للدالة ص = د (س) . أنظر الشكل (٣ – ٦)



الشكل (٣ – ٦)

(تمثل + ، − اشارة المشتقه)
هنالك ملاحظة هامة يجدر بنا ذكرها الآن وهى أنه في هذه الحالة تكون المشتقه د′ (س) تزايدية عند س١ ويعرف ذلك بأن تكون المشتقه الثانية د″ (س) عند س١ موجبة . (وذلك لأن المشتقه الثانية هى المشتقه الأولى للمشتقه الأولى وكون الثانية موجبة يشير إلى أن الأولى تزايدية) إذن نخلص إلى أنه إذا كانت:

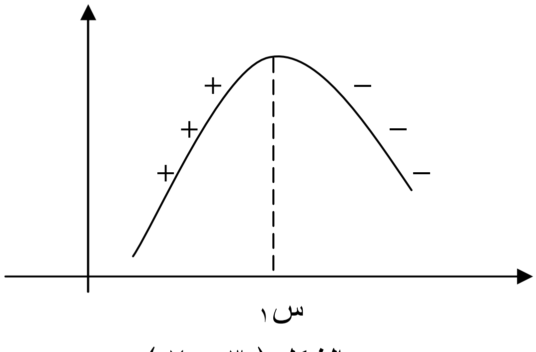
د′ (س١) = صفر

د″ (س١) > صفر

فإن النقطة (س١ ، د (س١)) نهاية صغرى محلية للدالة ص = د (س) .

الحالة الثانية:

أن تكون د′(س) >٠ بجوار س١ إلى اليسار منها ثم تصبح د′(س) <٠ بجوار س١ إلى اليمين منها . بنقاش مماثل لما دار في الحالة الأولى نخلص إلى أن النقطة (س١ ، د (س١)) تمثل نهاية عظمى محلية للدالة ص = د (س) . يبين ذلك الشكل (٣ – ٧) .



الشكل (٣ – ٧)

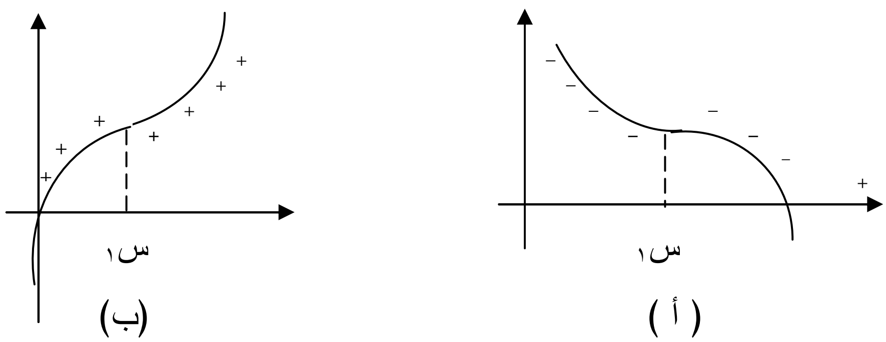
ونشير إلى ملاحظة مشابهة للحالة الأولى وهى أن المشتقه الأولى تكون تناقصية في هذه الحالة (الثانية) ، ويؤكد ذلك بأن تكون المشتقه د″ (س١) عند س١ سالبة . عليه نخلص إلى أنه إذا كانت :

د′ (س١) = صفر

د″ (س$_{١}$) < صفر

فإن النقطة (س$_{١}$ ، د (س$_{١}$)) نهاية عظمى محلية للدالة ص = د (س).

الحالة الثالثة : أن تكون د′ (س) < ٠ بجوار س$_{١}$ إلى اليسار واليمين من س$_{١}$ وبجوارها أو تكون د′ (س) > ٠ إلى اليسار واليمين من س$_{١}$ وبجوارها . كما هو موضح في الشكل (٣ – ٨) .



الشكل (٣ – ٨)

وفي هذه الحالة إما أن تكون الداله تناقصية [الشكل (٣ – ٨ (أ))] أو تزايدية [الشكل (٣ – ٨ (ب))] ولكن طرأ عليها سكون لحظى عند س$_{١}$ ، وذلك عندما يوازى المماس المحور السينى . تسمى النقطة س$_{١}$ في هذه الحالة بنقطة إنقلاب للدالة ص = د (س)، وليس هنالك شرط كافئ يؤكد معرفتنا بان النقطة س$_{١}$ نقطة انقلاب . ولكن من الضرورى في هذه الحالة أن يتحقق الشرط :

د″ (س$_{١}$) = صفر

وإلا كانت (س$_{١}$ ، د (س$_{١}$)) عظمى أو صغرى. المثال التالي يدل على أن الشرطين:

د′ (س$_{١}$) = صفر

د″ (س$_{١}$) = صفر

لا يكفيان لتكون (س$_{١}$ ، د (س$_{١}$)) نقطة انقلاب .

ص = د (س) = $س^{٤}$

د′ ($س_{١}$) = ٤ $س^{٣}$

د″ ($س_{١}$) = ١٢ $س^{٢}$

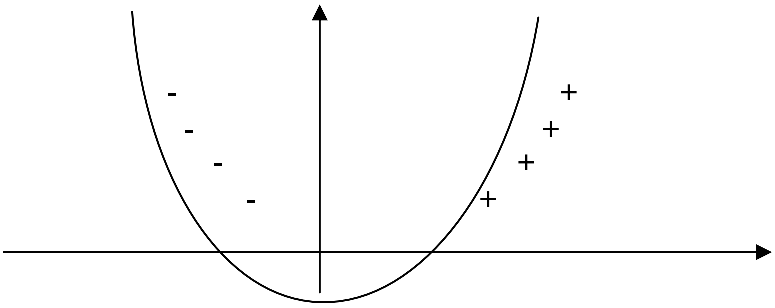
∴ د′ (٠) = ٠

د″ (٠) = ٠

ولكن د′ (س) < صفر إلى اليسار من $س_{١}$ = ٠

د′ (س) > صفر إلى اليمين من $س_{١}$ = ٠

مما يشير إلى أن النقطة (٠ ، ٠) تمثل نهاية صغرى للدالة [أنظر الشكل (٣ – ٩)] .



الشكل (٣ – ٩)

تعريف (٣ – ١) :

لتكن ص = د (س) داله في س وأن د′ ($س_{١}$) معرفة . تسمى النقطة ($س_{١}$ ، د ($س_{١}$)) نقطة حرجة للدالة ص = د (س) إذا كان د′ ($س_{١}$) = ٠
ونقول إن للدالة ص = د (س) نقطة حرجة عند $س_{١}$.

تصنف النقاط الحرجة إلى :

نهايات عظمى (محلية) ، أو نهايات صغرى (محلية)

أو إلى نقاط انقلاب .

لتمييز النقطة الحرجة ($س_{١}$ ، د ($س_{١}$)) للدالة ص = د (س)

(بعد تحقق الشرط د′ ($س_{١}$) = صفر) :

(أ) إذا كانت د″ ($س_{١}$) > ٠ فإن ($س_{١}$ ، د ($س_{١}$)) نهاية **صغرى محلية.**

(ب) إذا كانت د″ ($س_{١}$) < ٠ فإن ($س_{١}$ ، د ($س_{١}$)) نهاية **عظمى محلية.**

(جـ) إذا كانت د″ ($س_{١}$) = ٠ ، نحدد اشارة د′ (س) بجوار $س_{١}$ إلى اليسار وإلى اليمين . أى نتحصل على اشارة د′ ($س_{١}$ + هـ) ، د′($س_{١}$ − هـ) . حيث هـ > ٠ صغيرة صغراً كافياً (أى متناهية في الصغر بحيث لا تتغيــر إشارة د′(س) بيــن $س_{١}$ − هـ و $س_{١}$ ولا بين $س_{١}$ و $س_{١}$ + هـ)، فإذا كانت :

(١)د′ ($س_{١}$ − هـ) سالبة و د′($س_{١}$ + هـ) موجبة فإن ($س_{١}$ ، د ($س_{١}$)) **نهاية صغرى محلية** .

(٢)د′ ($س_{١}$ − هـ) موجبة و د′ ($س_{١}$ + هـ) سالبة فإن ($س_{١}$ ، د ($س_{١}$)) **نهاية عظمى محلية** .

(٣) الاشارتان متشابهتين فإن ($س_{١}$ ، د ($س_{١}$)) **نقطة انقلاب** ، تكون فيها الدالة تزايدية إذا كانتا موجبتين وتناقصية إذا كانتا سالبتين .

مثال (١) :

صنف النقاط الحرجة للدالة :

ص = د (س) = $س^{٣}$ − ٣ $س^{٢}$ − ٢٤ س + ١٢

الحل :

$د'(س) = ٣ س^٢ - ٦ س - ٢٤$

$د'(س) =$ صفر $\Leftarrow$

$س^٢ - ٢ س - ٨ =$ صفر

أو $(س - ٤) (س + ٢) =$ صفر

$\therefore س_١ = ٤ ، س_٢ = -٢$

$ص_١ = د (س_١) = د (٤) = ٤^٣ - ٣ \times ٤^٢ - ٢٤ \times ٤ + ١٢$

$= ٦٤ - ٤٨ - ٩٦ + ١٢ = - ٦٨$

$ص_٢ = د(س_٢) = د (^-٢) = (^-٢)^٣ - ٣ \times (^-٢)^٢ - ٢٤ \times (^-٢) + ١٢$

$= -٨ - ١٢ + ٤٨ + ١٢ = ٤٠$

$\therefore$ (٤ ، – ٦٨) ، (–٢ ، ٤٠) نقطتان حرجتان للدالة ص = د (س) .

$د''(س) = ٦ س - ٦$

$د''(٤) = ٦ \times ٤ - ٦ = ١٨ > ٠$

$د''(-٢) = ٦ \times (-٢) - ٦ = -١٨ < ٠$

$\therefore$ (٤ ، – ٦٨) نهاية صغرى محلية .

(–٢ ، ٤٠) نهاية عظمى محلية .

مثال (٢) :

جد معادلة المنحنى ص = د (س) = أ $س^٣$ + ب $س^٢$ + جـ س + د الذى يمر بالنقطة (٠ ، ٤) ، وتمثل النقطة (–١ ، ٢) نقطة انقلاب له .

الحل :

$د(س) =$ أ $س^٣$ + ب $س^٢$ + جـ س + د

$د'(س) = ٣$ أ $س^٢$ + ٢ب س + جـ .... (أ)

$د''(س) = ٦$ أ س + ٢ ب .... (ب)

النقطة (٠ ، ٤) تحقق معادلة المنحنى

$\therefore$ أ × ٠ + ب × ٠ + جـ × ٠ + د = ٤

$\therefore$ د = ٤ ....(١)

النقطة (−١ ، ٢) تحقق معادلة المنحنى (نقطة انقلاب)

$\therefore$ − أ + ب − جـ + د = ٢ ....(٢)

من تعويض (١) في (٢) ينتج

− أ + ب − جـ = −٢ .... (٣)

$\because$ (−١ ، ٢) نقطة انقلاب فإن :

د′ (− ١) = ٠

د″ (− ١) = ٠

وبتعويض د′ (−١) ، د″ (−١) في (أ) و (ب) نحصل على :

٣ أ − ٢ ب + جـ = ٠ .... (٤)

−٦ أ + ٢ ب = ٠ .... (٥)

بحل (٣) ، (٤) ، (٥) نحصل على أ = ٢ ، جـ = ٦ ، ب = ٦

$\therefore$ معادلة المنحنى هي :

ص = ٢ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٦ س + ٤

مثال (٣) : (تطبيقى)

برميل ماء اسطوانى الشكل بدون غطاء يراد أن يكون سعته ٢٠٠ بوصه^{٣} فما نصف قطر قاعدته الذى يمكننا من استعمال اقل كمية من المعدن لصنعه ؟

الحل :

كمية المعدن تعتمد على مساحة سطح البرميل م والتى تساوى :

م = π نق^{٢} + ٢π نق ل

حيث نق هو نصف قطر القاعدة و ل هو ارتفاع الاسطوانة .

حجم البرميل ح يعطى بـــ :

ح = π نق^{٢} ل

ولكن ح = ٢٠٠ ، إذن :

$$ل = \frac{٢٠٠}{\pi\ نق^{٢}}$$

$$\therefore م = \pi\ نق^{٢} + ٢\pi\ نق \times \frac{٢٠٠}{\pi\ نق^{٢}}$$

$\therefore$ مساحة السطح م بدلالة نق تعطى بـــ :

$$م = د\ (نق) = \pi\ نق^{٢} + \frac{٤٠٠}{نق}$$

$$\frac{د\ م}{د\ نق} = ٢\pi\ نق - \frac{٤٠٠}{نق^{٢}}$$

$$\frac{د\ م}{د\ نق} = ٠ \Leftarrow نق^{٣} = \frac{٢٠٠}{\pi}$$

$$\therefore نق = \sqrt[٣]{\frac{٢٠٠}{\pi}}$$

$$\frac{د^{٢}\ م}{د\ نق^{٢}} = ٢\pi + \frac{٨٠٠}{نق^{٣}}$$

عوض $نق^{٣} = \frac{٢٠٠}{\pi}$ في الطرف الأيسر

لنحصل على :

$$\frac{د^{٢}\ م}{د\ نق^{٢}} = ٢\pi + ٨٠٠ \times \frac{\pi}{٢٠٠} = ٦\pi > صفر$$

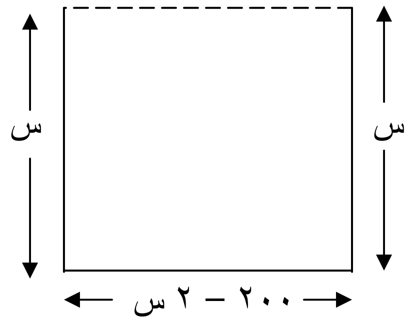
∴ عند نق = $\sqrt[3]{\frac{٢٠٠}{\pi}}$ تكون لمساحة السطح م نهاية صغرى ، وهى الوحيدة . إذن إذا كان نصف قطر القاعدة $\sqrt[3]{\frac{٢٠٠}{\pi}}$ فإن كمية المعدن ستكون أقل ما يمكن لاستيعاب السعة ٢٠٠ بوصه^{٣} .

مثال (٤) : (تطبيقى)

سلك طوله ٢٠٠ متر . فما أكبر مساحة لحظيرة مستطيلة الشكل يمكن أن يكفى السلك لإحاطة ثلاثة أضلاع منها .

الحل :

لنفرض أن طول أحد اضلاع الحظيرة يساوى س . [أنظر الشكل (٣ – ١٠)]



الشكل (٣ – ١٠)

∴ طول الضلع الآخر = ٢٠٠ – ٢ س

∴ مساحة الحظيرة م = (٢٠٠ – ٢ س) × س

م = د (س) = ٢٠٠ س – ٢ س^{٢}

$$\frac{د م}{د س} = ٢٠٠ - ٤ س$$

$$\frac{د م}{د س} = ٠ \Leftarrow س = ٥٠$$

$$\frac{د^٢ م}{د س^٢} = -٤ < ٠$$

إذن عند س = ٥٠ تكون للمساحة م نهاية عظمى ، وهى الوحيدة .

إذن للحصول على أكبر مساحة يجب أن يكون أحد الضلعين يساوى ٥٠ متر والثانى يساوى ١٠٠ متر . إذن أكبر مساحة يمكن احاطتها بسلك طوله ٢٠٠ متر من ثلاثة أضلاع هى ٥٠ × ١٠٠ = ٥٠٠٠ متر مربع .

تمرين (٣ – ٢)

(١) صنف النقاط الحرجة للدوال التالية :

(أ) د (س) = $س^٢$

(ب) د (س) = $س^٣ - ٦ س^٢ + ٩ س - ٥$

(جـ) د (س) = (س – ٢) $\sqrt[٣]{س - ١}$

(د) د (س) = $\frac{س}{س^٢ + ١}$

(هـ) د (س) = جا س

(و) د (س) = $س^٣ + \frac{٤٨}{س}$ ، س $\neq$ ٠

(٢) جد قيم أ ، ب ، جـ بحيث يحقق المنحنى :

ص = أ $س^٣$ + ب $س^٢$ + جـ س الشرطين التاليين :

(أ) يكون له نقطة إنقلاب عند س = $\frac{١}{٢}$

(ب) يمر بالنقطة (١ ، ١٣)

(٣) عددان مجموعهما ٦ فكم يكون العددان إذا اردنا أن نحصل على أصغر مجموع ممكن لمربعيهما ؟

(٤) جد أكبر حجم لأسطوانه دائرية مساحتها السطحية ٢٤π . علماً بإن الاسطوانه مصمتة .

(٣ – ٣) تطبيقات في الميكانيكا :

إذا تحرك جسم بحيث يكون بعده ف من نقطة ثابته يعطى بالعلاقة ف = د (ن) . إذا تغير الزمن من $ن_١$ إلى $ن_١ + \Delta$ ن يتغير البعد من $ف_١$ = د ($ن_١$) إلى $ف_١ + \Delta$ ف . إذن :

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{د(ن_١ + \Delta ن) - د(ن_١)}{\Delta ن}$$

هى السرعة المتوسطة التى يسير بها الجسم في الفترة من $ن_١$ إلى $ن_١ + \Delta$ ن . كلما صغرت Δ ن كلما كانت السرعة المتوسطة قريبة من سرعة الجسم $ع_١$ عند $ن_١$.

$$\therefore\ ع_١ = \lim_{\Delta ن \to ٠} \frac{د(ن_١ + \Delta ن) - د(ن_١)}{\Delta ن}$$

وتسمى $ع_١$ بسرعة الجسم اللحظية عند $ن_١$. تختلف $ع_١$ باختلاف $ن_١$. إذن السرعة اللحظية في أى لحظة ن داله في الزمن ن وتعرف بأنها معدل تغير المسافة ف بالنسبة للزمن ن وتكتب :

$$ع = \frac{د ف}{د ن}$$

وبالمثل تعرف عجلة الجسم جـ بأنها معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن وتكتب .

$$جـ = \frac{د ع}{د ن} = \frac{د^٢ ف}{د ن^٢}$$

مثال (١) :

إذا كانت المسافة لنقطة مادية في أى لحظة تعطى بالمتر بالقانون ف = ٢ $ن^٣$ + ٤ $ن^٢$. جد السرعة اللحظية والعجلة اللحظية للنقطة بدلالة ن، ثم جد السرعة والعجلة بعد ٢ ثانية من الابتداء .

الحل :

ف = ٢ $ن^٣$ + ٤ $ن^٢$

$$ع = \frac{د ف}{د ن} = ٦ ن^٢ + ٨ ن$$

$$جـ = \frac{د ع}{د ن} = ١٢ ن + ٨$$

بعد ٢ ثانية :

ع = ٦ × ٤ + ٨ × ٢ = ٤٠ متر / ث

جـ = ١٢ × ٢ + ٨ = ٣٢ متر / $ث^٢$

مثال (٢) :

إذا كانت السرعة ع لجسم متحرك تساوى أ $ن^٢$ + ٤ ن (أ ثابت) ، وكانت العجلة بعد ٢ ث تساوى ٣ متر / $ث^٢$ ، فاحسب أ ثم جد بعد كم ثانية يتوقف الجسم عن الحركة .

الحل :

$$جـ = \frac{د ع}{د ن} = ٢ أ ن + ٤$$

جـ = ٣ عند ن = ٢ $\Leftarrow$

٣ = ٤ أ + ٤ $\Leftarrow$ أ = $-\frac{١}{٤}$

$\therefore$ ع = $-\frac{١}{٤}$ $ن^٢$ + ٤ ن

$\therefore$ ع = ٠ $\Leftarrow$ ٠ = ن ($-\frac{ن}{٤}$ + ٤) = ن $\frac{١٦ - ن}{٤}$

∴ ن = ٠ (وهذا عند بداية الحركة من السكون أو ن = ١٦ ث وعندها يتوقف الجسم عن الحركة) .

تمرين (٣ – ٣)

(١) إذا كانت المسافة ف لجسم مادى متحرك تعطى بـ ف = ٥ $ن^٣$ + ٢$ن^٢$ + ٣ ن . جد السرعة والعجلة اللحظية لهذا الجسم بدلالة ن .

(٢) إذا كانت المسافة ف لجسم متحرك تعطى بـ ف= أ $ن^٣$ + ب ن (أ ، ب ثابتان) وكانت السرعة عند ن = ٣ ثانية تساوى ١٠ متر / ث وكانت العجلة عند ن = ١ ثانية تساوى ٥ متر / $ث^٢$. جد أ ، ب .

(٣) يتحرك جسم في خط مستقيم فيقطع مسافة ف قدماً بعد ن ثانية بحيث ف = $ن^٤$ – ٢$ن^٣$ + $ن^٢$ – ٥ . جد الزمن الذى تنعدم فيه سرعته وعجلته عندئذ .

(٤) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث يكون بعده بالأمتار بعد ن ثانية من النقطة و هو ف = ٢ $ن^٣$ – ٢١ $ن^٢$ + ٦٠ ن – ٢ . جد أقصى بعد يصل إليه الجسيم من النقطة و ، وعجلة الجسيم عندئذ .

(٥) يتحرك حجر رأسياً لأعلى ولأسفل في خط مستقيم بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ن ثانية هو ف = ١٢٨ ن – ١٦ $ن^٢$ قدم جد :

(أ) سرعة الحجر عند أى لحظة .

(ب) أقصى ارتفاع يصل إليه الحجر .

(جـ) سرعة الحجر الإبتدائية .

(٦) يتحرك جسم بحيث تعطى ازاحته ف عن نقطة ثابته بدلالة الزمن بالعلاقة ف = أ جتا (ب ن + هـ) حيث أ ، ب ، هـ ثوابت . أثبت أن العجلة تتناسب طردياً مع مقدار الازاحة .

(٣ – ٦) المعدلات الزمنية المرتبطة :

لنفرض أن ص داله في المتغير س وترتبط به مباشرة أو ضمنياً . إذا كان كل من ص و س داله في الزمن ن . فبمعرفة معدل تغير س أو ص بالنسبة لـ ن يمكن معرفة المعدل الآخر . نسمى $\frac{د\,س}{د\,ن}$ ، $\frac{د\,ص}{د\,ن}$

بمعدلين مرتبطين تربطهما العلاقة التى تربط س و ص .

نعلم من مشتقة داله الداله ، أ ن :

$$\frac{د\,ص}{د\,ن} = \frac{د\,ص}{د\,س} \cdot \frac{د\,س}{د\,ن}$$

نستخدم هذه المعادلة في حل المسائل المتعلقة بالمعدلات المرتبطة .

مثال (١) :

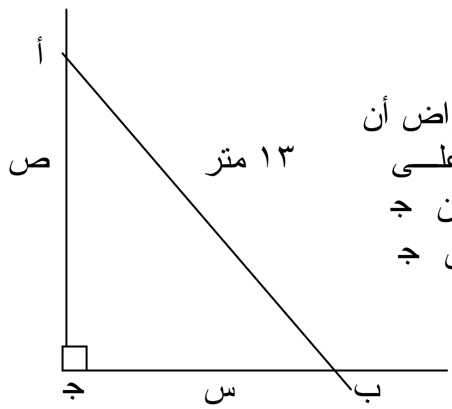
سلم طوله ١٣ متراً يرتكز على حائط رأسى . فإذا كان اسفل السلم يبعد عن قاعدة الحائط ٥ أمتار وبدأ ينزلق بمعدل ٤ متر / ث فما سرعة نزول أعلى السلم عندئذ ؟

الحل :

أنظر الشكل (٣ – ١٥)

المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في جـ بافتراض أن الحائط عمودى على الأرض إذا كان أعلى السلم أ يبعد مسافة ص متر عن جـ وأسفله ب يبعد مسافة س متر عن جـ فإن :

$$س^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩$$



الشكل (٣ – ١٥)

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـــ ن نجد أن :

$$٢\,س\ \frac{د\,س}{د\,ن} + ٢\,ص\ \frac{د\,ص}{د\,ن} = ٠$$

عند س = ٥ فإن ص = ١٢ ، $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}} = ٤$

∴ $٢ \times ٥ \times ٤ + ٢ \times ١٢ \times \frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = ٠$

∴ $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}} = - \frac{٤٠}{٢٤} = - \frac{٥}{٣}$ م / ث

∴ معدل نزول أعلى السلم أ هو $\frac{٥}{٣}$ م / ث

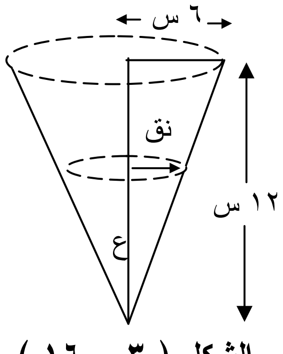
(الإشارة السالبة تعنى أن ص تنقص مع الزمن) .

مثال (٢) :

إناء على شكل مخروط دائرى قائم رأسه إلي أسفل وارتفاعه ١٢ سم ونصف قاعدته ٦ سم . ينسكب فيه الماء بمعدل ٣ سم^{٣} / ث . جد معدل ارتفاع الماء عندما يكون عمقه ٤سم .

الحل :

نفرض أن ع هو ارتفاع الماء في الاناء بعد ن ثانية وأن نق تمثل نصف قطر قاعدة الماء في الاناء بعد ن ثانية . أنظر الشكل (٣ - ١٦) .



الشكل (٣ – ١٦)

من تشابه المثلثات :

$$\frac{نق}{٦} = \frac{ع}{١٢} \Leftarrow ع = ٢ \, نق$$

حجم الماء في الاناء بعد ن ثانية يعطى بـــ :

$$ح = \frac{١}{٣} \pi \, نق^{٢} \, ع$$

ولكن $نق = \frac{ع}{٢}$

$$\therefore ح = \frac{١}{٣} \pi \left(\frac{ع}{٢}\right)^{٢} . ع$$

$$= \frac{\pi}{١٢} ع^{٣}$$

$$\therefore \quad \frac{د ح}{د ن} = \frac{\pi}{٤} ع^{٢} \frac{د ع}{د ن}$$

$\frac{د ح}{د ن} = ٣$ سم^{٣} / ث لكل ن .

عندما يكون ع = ٤ سم فإن :

$$٣ = \frac{\pi}{٤} \times ١٦ \times \frac{د ع}{د ن}$$

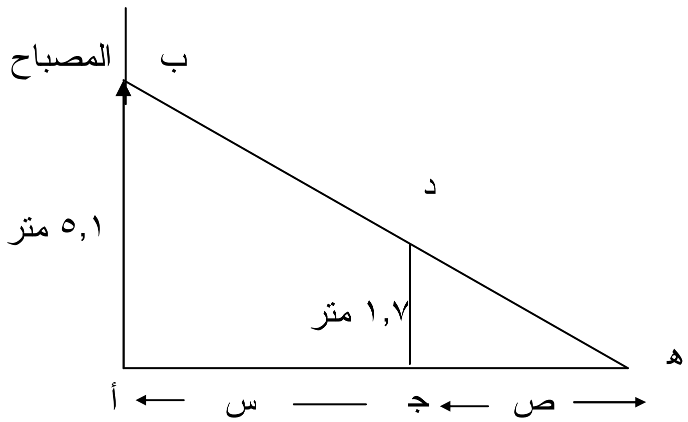
$$\therefore \quad \frac{د ع}{د ن} = \frac{٣}{٤ \pi} \text{ سم /ث}$$

$\therefore$ معدل ارتفاع الماء عندما يكون الارتفاع ٤ سم يكون $\frac{٣}{٤ \pi}$ سم / ث

مثال (٣) :

رجل طوله ١٧٠ سم يمشى بمعدل ١,٥ متر / ث في شارع أفقى به مصباح معلق على ارتفاع ٥,١ متر من سطح الأرض . جد معدل تغير طول ظل الرجل على أرض الشارع إذا كان الرجل يسير على خط مستقيم مبتعداً عن المصباح .

الحل :



الشكل (٣ – ١٧)

في الشكل (٣ – ١٧) تمثل النقطة ب موقع المصباح ، أ النقطة الواقعة تحت المصباح على أرض الشارع نفرض أن الرجل عند اللحظة ن كان عند جـ على بعد س من أ .

∴ أ جـ = س

طول ظله عندئذ هو جـ هـ = ص

المطلوب هو ايجاد $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ ، مع العلم بأن $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ١,٥ م / ث

طول الرجل بالأمتار = ١,٧

من تشابه المثلثين أ ب هـ ، جـ د هـ

$$\frac{١,٧}{٥,١} = \frac{\text{ص}}{\text{س + ص}}$$

$$\therefore \frac{ص}{س + ص} = \frac{١}{٣}$$

$$\therefore ص = \frac{١}{٢} س$$

$$\therefore \frac{د ص}{د ن} = \frac{١}{٢} \frac{د س}{د ن} = \frac{١}{٢} \times ١{,}٥ = ٠{,}٧٥ \text{ م / ث}$$

أى أن ظل الرجل يزداد طولاً بمعدل $\frac{٣}{٤}$ متر كل ثانية .

تمرين (٣ – ٤)

(١) كرة من المعدن تتمدد بالحرارة ، فإذا كان معدل تزايد نصف قطرها ٢ مم كل دقيقة ، فما معدل تزايد مساحة سطح الكرة ومعدل تزايد حجمها عندما يكون طول نصف القطر ٧ سم. (علماً بأن ح = $\frac{٤\pi}{٣}$نق^{٣} م = ٤πنق^{٢})

(٢) يجرى ولد بسرعة ٢م/ث في مستقيم أفقى متجهاً نحو عمود إرتفاعه ٦ متر . جد معدل تغير المسافة بين الولد وقمة العمود عندما يكون الولد على بعد ٨ متر من قاعدة العمود .

(٣) ولد طوله ل يمشي بسرعة ع في الشارع في اتجاه مصباح ارتفاعه م جد معدل تغير طول ظل الولد عندما يكون على بعد ف من قاعدة عمود المصباح .

(٤) تتحرك نقطة على المنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ٨ عين موضع النقطة في اللحظة التى يكون فيها $\frac{د س}{د ن} = \frac{د ص}{د ن}$.

(٥) بالون كروي يتسرب منه الغاز بمعدل ١٨سم٣/ث. جد معدل تناقص نصف قطر البالون في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطره يساوى ١٢سم. ثم جد معدل تناقص مساحة سطحه عندئذٍ.

(٦) يتساقط الرمل مكوناً كومة على شكل مخروط دائري قائم بمعدل ٦سم٣/ث. فإذا كان قطر قاعدة المخروط يساوى ارتفاعه جد معدل المتغير في ارتفاع مخروط الرمل في اللحظة التي يكون فيها هذا الارتفاع يساوى ٨سم.

(٧) بالون على ارتفاع ١٠٠متر يرتفع بمعدل ثابت يساوى ٥متر/ث وتمر من تحته سيارة تسير في خط مستقيم بسرعة ثابتة ٢٠ مرت/ث. ما سرعة السيارة بالنسبة للبالون بعد دقيقة من مرور السيارة تحت البالون؟

الوحدة الرابعة

التكامل

أهداف الوحدة الرابعة

بعد دارسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن :-

١. يتعرف مفهوم التكامل كعملية عكسية للتفاضل .
٢. يتعرف تكامل النسب المثلثية .
٣. يتعرف تطبيقات على التكامل في الهندسة التحليلية والحركة .
٤. يتعرف بعض طرق التكامل (مثل التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزئة) .

(٤) التكـامـل

(٤ – ١) التكامل كعملية عكسية للتفاضل :

في التفاضل نعطى الدالة ص في متغير ما س مثلاً ويطلب منا ايجـــاد

$\frac{ءص}{ءس}$. في العملية العكسية نعطى $\frac{ءص}{ءس}$ ويطلب منا ايجاد الداله ص .

هذه العملية العكسية تسمى بالتكامل فمثلاً إذا اعطينا .

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢\,س$$

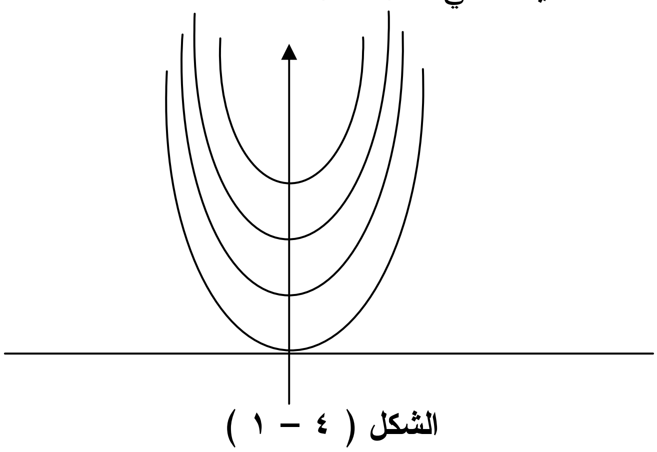
بسهولة يمكن ايجاد ص = $س^{٢}$ ، وبملاحظة خاطفة نجد أن ص يمكن أن تساوى $س^{٢}$ + ١ أو $س^{٢}$ – ٧ أو $س^{٢}$ + أ وبصورة عامـــة ص = $س^{٢}$ + ث (ث ثابت) كلها تمثل حلاً لايجاد ص إذا كان :

$$\frac{ءص}{ءس} = ٢\,س\ .$$

إذا نظرنا لذلك من الناحية الهندسية نرى أنه قد طلب منا ايجاد الداله

ص = د (س) إذا كان ميل المماس $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ س . الشكل (٤ – ١)

يعطى مجموعة المنحنيات التي تمثل الحل .



الشكل (٤ – ١)

وبصورة عامة نفترض أن :

$$ص = د(س)$$

فإذا كان $\frac{ءص}{ءس} = ر(س)$

فإننا نقول إن ص هى تكامل ر (س) بالنسبة لـــ س وتكتب

$$ص = \int ر(س)\, د س$$

ويساوى ذلك د (س) + ث حيث ث أى ثابت يسمى ثابت التكامل .

مثال (١) :

كامل (جد تكامل) الدالة ٣ س + ١ .

الحل :

$$\int (٣ س + ١)\, د س = \frac{٣}{٢} س^{٢} + س + ث$$

لأن $\frac{د}{د س} \left(\frac{٣}{٢} س^{٢} + س + ث \right) = ٣ س + ١$

الآن لكل ن $\neq$ −١

$$\frac{د}{د س} (س^{ن+١}) = (ن + ١)\, س^{ن}$$

أو $\frac{د}{د س} \left(\frac{س^{ن+١}}{ن + ١} \right) = س^{ن}$

عليه فإن :

$$\boxed{\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{د س} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ث}}$$

مثال (٢) :

$$\int \text{س}^{8}\,\text{د س} = \frac{\text{س}^{8+1}}{8+1} + \text{ث}$$

$$= \frac{\text{س}^{9}}{9} + \text{ث}$$

$$\int 4\,\text{س}^{5}\,\text{د س} = 4 \times \frac{1}{6}\text{س}^{6} + \text{ث}$$

$$= \frac{2}{3}\text{س}^{6} + \text{ث}$$

مثال (٣) :

جد :

(أ) $\int \left(\text{س}^{3} + \frac{1}{\text{س}^{3}}\right) \text{د س}$

(ب) $\int \left(\sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right) \text{د س}$

(جـ) $\int \left(\text{س} - \frac{1}{\text{س}}\right)^{2} \text{د س}$

الحل :

(أ) $\int (س^{٣} + \frac{١}{س^{٣}})\, د\, س$

$= \int (س^{٣} + س^{-٣})\, د\, س$

$= \frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{١}{٢} س^{-٢} + ث$

$= \frac{س^{٤}}{٤} - \frac{١}{٢س^{٢}} + ث$

(ب) $\int (\sqrt{س} + \frac{١}{\sqrt{س}})\, د\, س$

$= \int (س^{\frac{١}{٢}} + س^{-\frac{١}{٢}})\, د\, س$

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \frac{س^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + ٢ س^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + ٢ \sqrt{س} + ث$

(جـ) $\int \left(س - \frac{١}{س} \right)^{٢} د\, س$

$= \int \left(س^{٢} - ٢ + س^{-٢} \right) د\, س$

$= \frac{س^{٣}}{٣} - ٢\, س + \frac{س^{-١}}{-١} + ث$

$= \frac{س^{٣}}{٣} - ٢\, س - \frac{١}{س} + ث$

تلاحظ أن التكامل يعتمد بصورة مباشرة على معرفتنا بالصيغ الأساسية في التفاضل ، وبمقتضى ما درسناه في التفاضل يجب علينا معرفة هذه الصيغ الأساسية الموضحة في الجدول (٤ – ١) والتى يمكن إثباتها مباشرة باجراء التفاضل .

الدالة	تكاملها بالنسبة لـــ س
$س^{ن}$	$\frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث \quad ، \quad ن \neq -١$
جا أ س	$-\frac{١}{أ}$ جتا أ س + ث
جتا أ س	$\frac{١}{أ}$ جا أ س + ث
$قا^{٢}$ أ س	$\frac{١}{أ}$ ظا أ س + ث

قتا^{٢} أ س	$-\frac{١}{أ}$ ظتا أ س + ث
قا أ س ظا أ س	$\frac{١}{أ}$ قا أ س + ث
قتا أ س ظتا أ س	$-\frac{١}{أ}$ قتا أ س + ث

جدول (٤ – ١)

مثال (٤) :

جد :

(أ) $\int$ جا ٧ س د س

(ب) $\int$ جا ٢س جتا س د س

الحل :

(أ) من الجدول :

$\int$ جا ٧س د س = $-\frac{١}{٧}$ جتا ٧ س + ث

(ب) جا٢س جتا س ليست مع الصيغ الأساسية ولكن

جا ٢س جتا س = $\frac{١}{٢}$ [جا ٣ س + جا س]

إذن : $\int$ جا٢س جتا س د س = $\int$ ($\frac{١}{٢}$ جا ٣ س + $\frac{١}{٢}$ جا س) د س

= $\frac{١}{٢}$ (− $\frac{١}{٣}$ جتا ٣س) + (− $\frac{١}{٢}$ جتا س) + ث

= − $\frac{١}{٦}$ جتا ٣ س − $\frac{١}{٢}$ جتا س + ث

تمرين (٤ – ١)

(١) جد التكاملات الآتية :

(أ) $\int$ س^{٧} د س

(ب) $\int \frac{\text{س}^{٣} - ١}{\text{س}^{٢}}$ د س

(جـ) $\int \left(\frac{١}{\text{ن}} + \text{ن} \right)^{٢}$ د ن

(د) $\int$ (١ – ٣ س) (١ + س) د س

(هـ) $\int$ ظا^{٢} س د س

(و) $\int$ جا^{٢} س د س

(تلميح : جتا ٢ س = ١ – ٢ جا^{٢} س)

(٢) إذا كان $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٢ س^{٢} ، جد العلاقة بين س وص عندما ص = ١ ، س = ١

(٣) ص = د (س) منحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٤) ويساوى ميله ٢ س – ١ عند كل نقطة (س ، ص) . جد د (س) .

تطبيقات (٤-٢) :-

سبق ان عرفنا ان المشتقة الأولى للدالة ص = د(س) عند أي نقطة (س،ص) على منحنى هذه الدالة تعنى ميل المماس للمنحنى عند تلك النقطة. عليه يكون إذا أعطينا ميل المماس بدلالة س فان تكامل الميل يعنى معادلة المنحنى. ولإيجاد ثابت التكامل لابد من معرفة إحدى النقاط أو أي شرط آخر التي يمر بها المنحنى وبتعويضها نحصل على قيمة الثابت. كما في الأمثلة التالية :-

مثال (١) :

جد معادلة المنحنى ص = د (س) الذي يمر بنقطة الأصل ويساوى ميله ٣ - ٢ س^{٢}

الحل :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣ - ٢\,\text{س}^{٢}$$

$$\therefore \text{ص} = \int (٣ - ٢\,\text{س}^{٢})\ \text{د س}$$

$$\therefore \text{ص} = ٣\,\text{س} - \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{٣} + \text{ث} \quad (\text{ث ثابت})$$

المنحنى يمر بنقطة الاصل . إذن ص = ٠ عندما س = ٠ إذن ث = صفر .

$$\therefore \text{المعادلة هى ص} = ٣\,\text{س} - \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{٣}$$

مثال (٢) :

جد معادلة المنحنى ص = د (س) إذا كان ميل المماس عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة م = جا^{٢}س+١ وكان المنحنى يمر بالنقطة (٠، ١).

الحل :

بما أن م = جا^{٢}س+١

أي أن $\frac{دص}{دس}$ = = جا^{٢}س+١

∴ ص = ∫ (جا^{٢} س+١) د س

∴ ص = − $\frac{١}{٢}$ جتا^{٢} س+ س+ث

المنحنى يمر بنقطة (٠ ، ١)

∴ ١ = − $\frac{١}{٢}$ جتا^{٢} ٠+٠+ ث

∴ ث = ١ + $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣}{٢}$

∴ معادلة المنحنى : ص = س − $\frac{١}{٢}$ جتا^{٢}س + $\frac{٣}{٢}$

تمرين (٤ −٢)

(١) ص = د(س) منحنى يمر بالنقطة (٣،٤) ويساوى ميله ٢س− ١ عند كل نقطة (س،ص)
جد د(س).

(٢) جد معادلة المنحنى الذي ميله عند أي نقطة عليه يساوى (٢−س)^{٢} إذا كان المنحنى يمر بالنقطة (٢، ٣).

(٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى ما عند أي نقطة عليه علماً بأنه يمر بالنقطة (٣، −١).

(٤) منحنى يمر بالنقطة(٢،٨) وميله عند أي نقطة عليه يساوى (٣س+١)^{٢} جد معادلته.

(٥) جد معادلة المنحنى الذي يقطع المحور السيني عند س = ١ ، − $\frac{٤}{٣}$

إذا علمنا أن س^{٤} (ص″ − ١٨) = ١٩٢ عند أي نقطة (س ، ص) على المنحنى .

(٦) إذا كانت ص′ = س^{٢} – أ س $\sqrt{٣}$ ، أ ثابت ، ص = ٠ عندما س = ٠ وعندما س = $\sqrt{٣}$. جد ص بدلالة س ثم ارسم منحنى الدالة ص .

(٧) ميل منحنى يمر بالنقطة (١،٢) هو $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ص}{س}$ جد معادلة المنحنى

(٤ – ٣) تطبيقات التكامل في الحركة :

عرفنا سابقاً أنه إذا تحرك جسم في خط مستقيم فإن المسافة ف التي يقطعها في زمن قدره ن ثانية تعطى بالعلاقة ف = (ن). وأن المشتقة الأولى لهذه الدالة $\frac{د ف}{د ن}$ تعنى السرعة التي يتحرك بها الجسم عند أي لحظة ن.

وأن مشتقة السرعة $\frac{د ع}{د ن}$ تعنى العجلة ج لحركة الجسم عند أي لحظة ن.

عليه يكون تكامل العجلة يعطى السرعة التي يتحرك عليها الجسم. وتكامل السرعة يعطى المسافة التي يقطعها الجسم عند أي لحظة ن. ولإيجاد الثوابت التي تنتج عن التكامل يجب معرفة المسافة أو السرعة عند أي لحظة معينة كما في الأمثلة التالية :-

مثال (١) :

تحرك جسم من النقطة و في خط مستقيم وكانت سرعته ع بعد زمن ن تعطى بـــ ع = ٢ ن – ن^{٢} . جد المسافة ف التى يقطعها الجسم بعد ٢ ثانية من النقطة و .

الحل :

$$ع = \frac{د ف}{د ن} = ٢ ن – ن^{٢} \Leftarrow ف = \int ع د ن$$

$\therefore$ ف = $\int$ (٢ ن − ن^{٢}) د ن

$\therefore$ ف = ن^{٢} − $\frac{١}{٣}$ن^{٣} + ث (ث ثابت)

ولكن ف = صفر عند ن = صفر
(لأن الجسم تحرك من و)
إذن :

ف = ن^{٢} − $\frac{١}{٣}$ ن^{٣}

إذن المسافة بعد ٢ ثانية تكون :

ف = ٢^{٢} − $\frac{١}{٣}$ × ٢^{٣} = ٤ − $\frac{٨}{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ وحدة .

مثال (٢) :

تتحرك نقطة مادية في خط مستقيم بعجلة قدرها ١٨ − ٢ن مترات^{٢} في نهاية زمن قدره ن ثانية. فإذا بدأت الحركة من نقطة ثابتة بسرعة ابتدائية قدرها ٢٠ مترات. جد سرعتها وبعدها عن النقطة الثابتة في نهاية زمن قدره ٣ ثوانٍ.

الحل :

العجلة ج = ١٨ − ٢ن

$\therefore$ السرعة ع = $\int$ (١٨− ٢ن) د ن

= ١٨ن − ن^{٢} + ث

السرعة الابتدائية تساوى ٢٠ مترا عند ن = ٠

$\therefore$ ث = ٢٠

$\therefore$ ع = ١٨ن − ن^{٢} + ٢٠

المسافة ف = $\int$ ع د ن

$= \int (18ن - ن^{2} + 20)\, د ن$

$= 9 ن^{2} - \frac{ن^{3}}{3} + 20ن + ث_{2}$

بدأت النقطة الحركة من النقطة الثابتة

$\therefore$ ف = ٠ عند ن = ٠

$\therefore ث_{2} = 0$

$\therefore ف = 9 ن^{2} - \frac{ن^{3}}{3} + 20ن$

$\therefore$ المسافة بعد ٣ ثوانٍ

$ف = 9\times9 - \frac{27}{3} + 20\times3$

$= 81 - 9 + 60 = 132$ متراً.

تمرين (٤ -٣)

(١) تعطى السرعة ع مترات لنقطة مادية تتحرك على خط مستقيم في نهاية زمن قدره ن ثانية بالعلاقة $ع = 3ن^{2} + 2ن + 1$
جد العجلة عند ن= ٢ث. والمسافة التي تقطعها بين ن = ٢ث و ن = ٣ ث

(٢) تتحرك سيارة من السكون بعجلة متغيرة تساوى (١ - ٣ن) مترات بعد زمن قدره ن ثانية.
جد كلاً من السرعة والمسافة التي تقطعها بدلالة الزمن ن.

(٣) يتحرك جسم على المحور السيني (وس) مبتدئاً حركته نقطة الأصل و. وبعد ن ثانية كانت سرعته $3 ن^{2} + 2$ مترات. جد بعده عن نقطة الأصل بعد ثانيتين.

(٤) تتحرك نقطة مادية من السكون عند الانطلاق بعجلة قدرها ١٢− ٦ن مترات^{٢}. جد أقصى بعد لها عن نقطة الانطلاق قبل أن يعود لها مرة أخرى. جد أيضاً زمن العودة إلى نقطة الانطلاق.

(٥) إذا كانت عجلة جسم جـ بعد ن من الثواني تعطي بالقاعدة جـ = ٦ن+٤. جد المسافة التي يقطعها بعد ٣ ثوانٍ من بدء الحركة إذا كانت سرعته الابتدائية ٢ مترات وانه قطع مسافة ٢١ متراً في أول ثانيتين من بدء الحركة.

(٦) يتحرك جسم على المحور السيني بسرعة ابتدائية ع.. وإذا كانت مسافته من نقطة البداية عند الزمن ن تساوى ف وسرعته ع
وكان يتحرك بعجلة ثابتة مقدارها جـ. أثبت أن :

ع = ع. + جـ ن

ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

واستنتج أن :

ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢جـ ف

(٤ – ٤) بعض طرق التكامل :

من الفصل السابق اتضح أنه إذا لم تكن حدود الدالة المراد تكاملها من الصور القياسية فإنه لابد من التصرف في تحويل الداله إلى صورة مكافئة تمكن من ايجاد تكاملها فعلنا ذلك في تكامل جا ٢ س جتا س في أمثلة الفصل السابق ، ولمحنا في التمرين السابق لتكامل جا^{٢} س إلى استخدام جتا ٢ س = ١ – ٢ جا^{٢} س ليتحول التكامل إلى : $\frac{١}{٢}\int$ (١ – جتا ٢ س) د س والحدان داخل التكامل يمكن تكاملها بالصور القياسية . ونتوقع أن يكون قد حاولت كتابة قا^{٢} س – ١ بدلاً عن ظا^{٢} س في التمرين السابق .

(أ) التكامل بالتعويض :

لإيجاد التكامل

$$\int (\text{٥ س} + ٣)^{٢}\, \text{د س}$$

نكتب $(\text{٥ س} + ٣)^{٢} = \text{٢٥ س}^{٢} + \text{٣٠ س} + ٩$

ثم نجر التكامل المطابق

$$\int (\text{٢٥ س}^{٢} + \text{٣٠ س} + ٩)\, \text{د س}$$

$$= \frac{٢٥}{٣}\text{س}^{٣} + \text{١٥ س}^{٢} + \text{٩س} + \text{ث}$$

لكن إذا حاولنا نفس الطريقة لايجاد التكامل $\int (\text{٥ س} + ٣)^{١٠}\, \text{د س}$ مثلاً فإن ذلك يستغرق وقتاً طويلاً لفك القوس $(\text{٥ س} + ٣)^{١٠}$ بذات الحدين ثم نتحمل عناء إجراء التكامل لـــ ١١ حد .

الآن إذا عوضنا ع = ٥ س + ٣ فإن :

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = ٥$$

$$\therefore\ \text{د س} \equiv \frac{\text{د ع}}{٥}$$

عليه يتحول التكامل إلى :

$$\int (\text{٥ س} + ٣)^{١٠}\, \text{د س} \equiv \int \text{ع}^{١٠} \frac{\text{د ع}}{٥}$$

$$= \frac{١}{٥}\int \text{ع}^{١٠}\, \text{دع} = \frac{١}{٥}\, \frac{\text{ع}^{١١}}{١١} + \text{ث}$$

$$= \frac{(\text{٥س} + ٣)^{١١}}{٥٥} + \text{ث}$$

فالتعويض طريقة تستخدم لتحويل التكامل إلى صورة من الصور القياسية أو إلى صورة يسهل تحويلها إلى صورة قياسية .

بصورة عامة يمكن أن نستنتج أن :

$$\int (\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}} \, \text{د س} = \frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن}+١)} + \text{ث} \qquad (\text{ن} \neq -١)$$

مثال (١) :

اجر التكاملات الآتية .

(أ) $\int \sqrt{٣\text{س} + ١} \, \text{د س}$ (ب) $\int \text{جا} (٤\text{س} + ١) \, \text{د س}$

الحل :

(أ) ضع $\text{ع} = ٣\text{س} + ١$

$$\frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = ٣$$

$$\therefore \text{د س} = \frac{\text{د ع}}{٣}$$

$$\therefore \int \sqrt{٣\text{س} + ١} \, \text{د س} = \int \text{ع}^{\frac{١}{٢}} \, \frac{\text{د ع}}{٣}$$

$$= \frac{\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث} = (٣\text{س} + ١)^{٣} + \text{ث}$$

(ب) ضع ع = ٤ س + ١

$\therefore \quad \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = ٤ \quad \text{د س} = \frac{\text{د ع}}{٤}$

$\therefore \quad \int \text{جا} \,(٤\,\text{س} + ١)\ \text{د س} = \frac{١}{٤} \int \text{جا ع د ع}$

$= \frac{١}{٤}\,(-\,\text{جتا ع}) + \text{ث}$

$= -\,\frac{١}{٤}\,\text{جتا}\,(٤\,\text{س} + ١) + \text{ث}$

مثال (٢) :

لتكن ر (س) داله في س قابله للاشتقاق . أثبت أن

$$\int \text{ر}\,(\text{س})\ \text{ر}'\,(\text{س})\ \text{د س} = \frac{[\,\text{ر}\,(\text{س})\,]^{٢}}{٢} + \text{ث}$$

الحل :

ضع ع = ر (س)

$\therefore \quad \frac{\text{د ع}}{\text{د س}} = \text{ر}'\,(\text{س}) \quad \Leftarrow \quad \text{د ع} = \text{ر}'\,(\text{س})\ \text{د س}$

باستخدام ع يصبح التكامل :

$$\int \text{ع د ع} = \frac{\text{ع}^{٢}}{٢} + \text{ث}$$

$$= \frac{[\,\text{ر}\,(\text{س})\,]^{٢}}{٢} + \text{ث} \;.$$

يمكن اعتبار المثال السابق نتيجة عامة يستفاد منها في ايجاد بعض التكاملات .

مثال (٣) :

اجر التكامل

$$\int \text{ظا س قا}^{٢}\text{س د س}$$

الحل :

ضع ع = ظا س ، إذن د ع = قا^{٢} س د س

$$\therefore \int \text{ظا س قا}^{٢}\text{س د س} = \int \text{ع د ع}$$

$$= \frac{\text{ع}^{٢}}{٢} + \text{ث}$$

$$= \frac{\text{ظا}^{٢}\text{س}}{٢} + \text{ث}$$

هنالك نتيجة مماثلة وهى أنه إذا كان :

$$\frac{\text{د}}{\text{د س}}\left(\text{ت}\,(\text{س})\right) = \text{د}\,(\text{س})$$

فإن :

$$\int \text{د}\,(\text{ر}\,(\text{س}))\ \text{ر}'\,(\text{س})\ \text{د س}$$

$$= \text{ت}\,(\text{ر}\,(\text{س})) + \text{ث}$$

بالتعويض :

$$\text{ع} = \text{ر}\,(\text{س})$$

$$\text{د ع} = \text{ر}'\,(\text{س})\ \text{د س}$$

يصبح التكامل :

$$\int \text{د}\,(\text{ر}\,(\text{س}))\,\text{ر}'\,(\text{س})\,\text{د س} = \int \text{د}\,(\text{ع})\,\text{د ع}$$

$$= \text{ت}\,(\text{ع}) + \text{ث}$$

$$= \text{ت}\,(\text{ر}\,(\text{س})) + \text{ث}$$

مثال (٤) :

أجر $\int \text{س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ١}\ \text{د س}$

الحل :

ضع $\text{ع} = \text{س}^{٢}$ ، $\text{د ع} = ٢\,\text{س د س}$

$$\therefore \text{س د س} = \frac{\text{د ع}}{٢}$$

$$\therefore \int \sqrt{\text{س}^{٢} + ١}\ \text{س د س}$$

$$= \frac{١}{٢}\int \sqrt{\text{ع} + ١}\ \text{د ع}$$

$$= \frac{(\text{ع} + ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

$$= \frac{٢}{٣}\sqrt{(\text{س}^{٢} + ١)^{٣}} + \text{ث}$$

مثال (٥) :

اجر $\int$ حا^{5} س د س

الحل :

جا^{5} س = جا^{4} س جا س

= (١ − جتا^{2} س)^{2} جا س

∴ $\int$ جا^{5} س د س

= $\int$ (١ − جتا^{2} س)^{2} جا س د س

ضع ع = جتا س

∴ د ع = − جا س د س

∴ $\int$ جا^{5} س د س = − $\int$ (١ − ع^{2})^{2} د ع

= − $\int$ (١ − ٢ ع^{2} + ع^{4}) د ع

= − [ع − $\frac{2}{3}$ ع^{3} + $\frac{1}{5}$ ع^{5}] + ث

∴ $\int$ جا^{5} س د س = − (جتا س − $\frac{2}{3}$ جتا^{3} س + $\frac{1}{5}$ جتا^{5} س) + ث

[بتعويض ع = جتا س]

(ب) التكامل بالتجزئة :

إذا كانت ل ، ع دالتين في س فإن :

$\frac{\text{د}}{\text{د س}}$ (ل ع) = ع $\frac{\text{د ل}}{\text{د س}}$ + ل $\frac{\text{د ع}}{\text{د س}}$

بتكامل الطرفين بالنسبة لـــ س

$$ل\,ع = \int ع \,\frac{د\,ل}{د\,س}\, د\,س \;+\; \int ل\,\frac{د\,ع}{د\,س}\, د\,س$$

$$\boxed{\therefore \quad ع \times \frac{د\,ل}{د\,س}\, د\,س \;=\; ل\,ع \;-\; ل\,\frac{د\,ع}{د\,س}\, د\,س}$$

نستخدم هذه الصيغة في الحالات التى يستعصى فيها ايجاد تكامل الدالة

ع $\frac{د\,ل}{د\,س}$ ، بينما يكون من الممكن ايجاد تكامل ل $\frac{د\,ع}{د\,س}$

مثال (٦) :

اجر $\int$ س جتا س د س

الحل :

ضع ع = س $\therefore$ $\frac{د\,ع}{د\,س} = ١$

$\frac{د\,ل}{د\,س}$ = جتا س $\therefore$ ل = جا س

$$\because \quad \int ع\,\frac{د\,ل}{د\,س}\, د\,س = ع\,ل \;-\; \int ل\,\frac{د\,ع}{د\,س}\, د\,س$$

فإن :

$\int$ س جتا س د س = س جا س − $\int$ جا س د س

= س جا س + جتا س + ث

تمرين (٤ – ٤)

اجر التكاملات الآتية :

(١) $\int \frac{د\,س}{\sqrt{٥\,س - ١}}$

(٢) $\int قتا^{٢}\,(\,٢\,س + ٥\,)\,د\,س$

(٣) $\int جا^{٢}\,(\,٢\,س + ٥\,)\,د\,س$

(٤) $\int \frac{٢\,س + ١}{\sqrt{س^{٢} + س - ١}}\,د\,س$

(٥) $\int \frac{جا\,س}{جتا^{٣}\,س}\,د\,س$

(٦) $\int جتا^{٤}\,س\,جا\,س\,د\,س$

(٧) $\int ظتا^{٣}\,س\,قتا^{٢}\,س\,د\,س$

(٨) $\int$ جا ٥ س جا ٣ س د س

(٩) $\int$ س $\sqrt{\text{٢ − س}}$ د س ، عوض بـــ ع = ٢− س

(١٠) مستخدماً التكامل بالتجزئة جد ما يأتي :−

(أ) $\int$ س^{٢} جتا س د س (ب) $\int$ س جا^{٢}س دس

(جـ) $\int$ س جتا أس دس

الوحدة الخامسة

التكامل المحدد وتطبيقاته

$$\int_{1}^{3}$$

أهداف الوحدة الخامسة

بعد دارسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن :-

١. يتعرف التكامل المحدد .

٢. يتعرف تطبيقات على التكامل ا لمحدد (المساحات) .

(٥) التكامل المحدد وتطبيقاته

(٥ – ١) التكامل المحدد :

أفرض ص = د (س) داله معرفه في الفترة [أ ، ب] .

$\int$ د (س) د س = ر (س) ، ر′ (س) = د (س)

$$\int_{أ}^{ب} د\,(س)\,د\,س = ر\,(ب) - ر\,(أ)$$

يسمى هذا النوع من التكامل بالتكامل المحدد .

مثال (١) :

جد قيمة :

(أ) $\int_{١}^{٢}$ ($س^{٣}$ + س) د س

(ب) $\int_{٠}^{٣}$ ($س^{٢}$ – ٢) د س

الحل :

(أ) $\int_{١}^{٢}$ ($س^{٣}$ + س) د س = $\left[\frac{س^{٤}}{٤} + \frac{س^{٢}}{٢} \right]$

$$= \left[\frac{٢^{٤}}{٤} + \frac{٢^{٢}}{٢}\right] - \left[\frac{١^{٤}}{٤} \quad \frac{١^{٢}}{٢}\right]$$

$$= [٤ + ٢] - \left[\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}\right]$$

$$= ٦ - \frac{٣}{٤} = ٥\frac{١}{٤}$$

(ب) $\int_{٠}^{٣} (س^{٢} - ٢)\, د\, س = \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٢\, س\right]_{٠}^{٣}$

$$= \left[\frac{٣^{٣}}{٣} - ٢ \times ٣\right] - \left[\frac{٠^{٣}}{٣} - ٢ \times ٠\right]$$

$$= [٩ - ٦] - ٠ = ٣$$

- **بعض خواص التكامل المحدد :**

(١) إذا كانت قيمة ه نقطة بين أ ، ب فإن :

$$\int_{أ}^{ب} د\,(س)\, د\, س = \int_{أ}^{ه} د\,(س)\, د\, س + \int_{ه}^{ب} د\,(س)\, د\, س$$

فمثلاً :

$$\int_{٢}^{٥} د\,(س)\, د\, س = \int_{٢}^{٣} د\,(س)\, د\, س + \int_{٣}^{٥} د\,(س)\, د\, س$$

(٢) $\int_{أ}^{ب} د\,(س)\,د\,س \;=\; - \int_{أ}^{ب} د\,(س)\,د\,س$

لأن:

$\int_{أ}^{ب} د\,(س)\,د\,س = ر\,(ب) - ر\,(أ)$

$= - [\,ر\,(أ) - ر\,(ب)\,]$

$= - \int_{ب}^{أ} د\,(س)\,د\,س$

(٣) إذا كانت $س = ت\,(ع)$ فإن $د\,س = ت'\,(ع)\,د\,ع$ عليه فإن :

$\int_{أ}^{ب} د\,(س)\,د\,س = \int_{ق}^{ك} د\,(ت\,(ع))\,ت'\,(ع)\,د\,ع$

حيث $أ = ت\,(ق)$ و$ب = ت\,(ك)$
أي عند استخدام طريقة التكامل بالتعويض وتغيير المتغير يتغير حدا التكامل تبعاً للمتغير الجديد.

(٤) إذا كانت $ص = د\,(س)$ داله زوجية ، أى تحقق
$د\,(س) = د\,(-س)$ فإن :

$\int_{-أ}^{أ} د\,(س)\,د\,س = ٢ \int^{أ} د\,(س)\,د\,س$

ب

ومن أمثلة الدوال الزوجية :

د(س) = أس^{٢} ، هـ(س) ب س^{٤} ، .. ر(س) = جتاس

(٥) إذا كانت ص = د (س) داله فردية ، أى تحقق

د (– س) = – د (س)

فإن :

$$\int_{-م}^{م} د(س)\, د س = ٠$$

ومن أمثلة الدوال الفردية :

د(س) = أس^{ن} ، حيث ن = ١، ٣، ٥، ...

هـ(س) = جا س ر(س) = ظا س

تحقق من ذلك في الحالتين التاليتين :

(أ) $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}}$ جتا س د س

(ب) $\int_{-١}^{١}$ س^{٣} د س

الحل :

$$\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} جتا\, س\, د\, س = [\, جا\, س\,]_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} = (جا\,\frac{\pi}{٢} - جا(-\frac{\pi}{٢})) = ١ - (-١) = ٢$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ٢\text{جتا س د س} = ٢\left[\text{جا س}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= ٢\left[\text{جا }\frac{\pi}{٢} - \text{جا }٠\right] = ٢\,(١ - ٠) = ٢$$

(ب) $\int_{-١}^{١} \text{س}^{٣}\text{ د س} = ٠$

$$\int_{-١}^{١} \text{س}^{٣}\text{ د س} = \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤}\right]_{-١}^{١} = \left[\frac{(١)^{٤}}{٤} - \frac{(-١)^{٤}}{٤}\right]$$

$$= \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٤}\right) = ٠$$

تمرين (٥-١)

جد قيمة ما يأتي :-

(١) $\int_{-٢}^{٣} \text{س}^{٢}\text{ د س}$ (٢) $\int_{-٢}^{-١} \text{س}^{٣}\text{ د س}$

(٣) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا س د س}$ (٤) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا س جتا س د س}$

(٥) $\int_{-١}^{٣} \sqrt{٢\text{س} + ٣}\text{ د س}$ (٦) $\int_{١}^{٩} \frac{(١-\text{س})^{٢}}{\sqrt{\text{س}}}\text{ د س}$

(٧) $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{٢}} \text{٨س جاس د س}$ (٨) $\int_{\cdot}^{٣} \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢}} \text{ د س}$

(٩) $\int_{\cdot}^{٢} \text{س}^{٢} \sqrt{\text{س}^{٣} + ١} \text{ د س}$ (١٠) $\int_{-٣}^{٣} (\text{س}^{٥} + ٢\text{ س}^{٣} + \text{س}) \text{ د س}$

(١١) $\int_{-\frac{\pi}{٢}}^{\frac{\pi}{٢}} (\text{جتا س} + \text{س}^{٤}) \text{ د س}$

(١٢) إذا كان $\int_{-١}^{\text{جـ}} \text{س د س} = \text{صفر}$

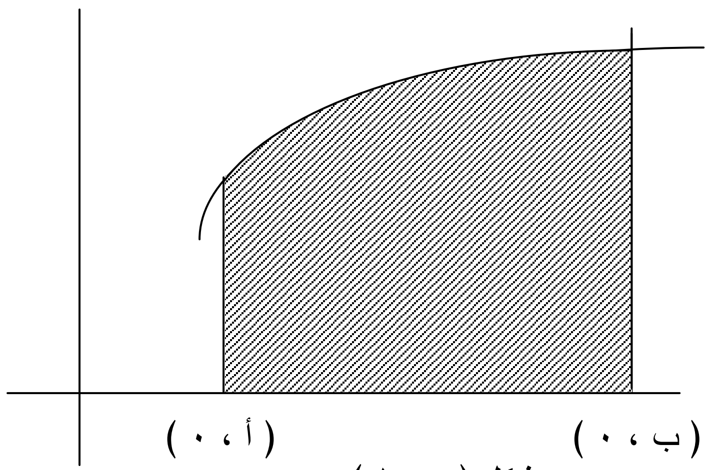
جد قيمة الثابت **جـ**

(٥ – ٢) المساحات :

معروف أن الأشكال الهندسية المنتظمة يمكن إيجاد مساحتها . ولكن تكمن الصعوبة في إيجاد مساحات لأشكال غير الأشكال الهندسية المتعارف عليها .

وسنتناول بالشرح في هذه الفقرة كيفية ايجاد المساحة المحصورة بين منحنى دالة ما ومحور السينات باستخدام مفهوم التكامل المحدد .

جد المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور السينى من س = أ إلى س = ب في الشكل (٥ – ١)

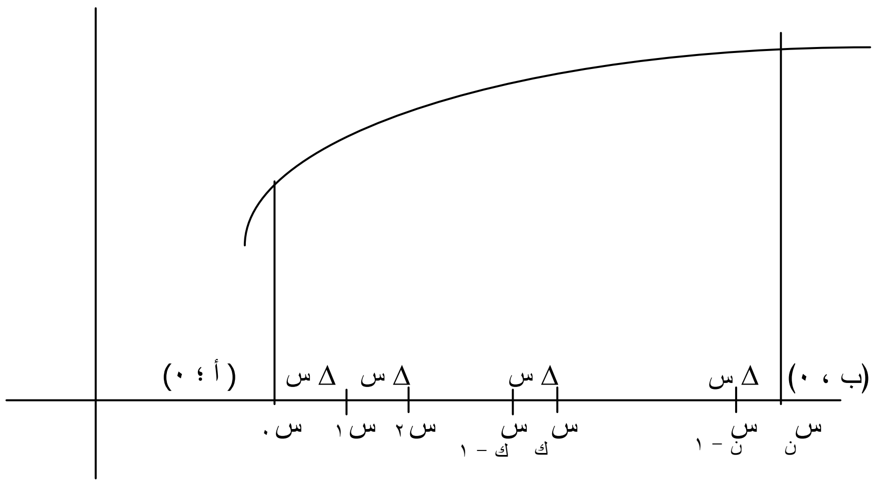


شكل (٥ – ١)

هذه المساحة لا يمكن ايجادها بالطرق المعروفة ؛ لأن أحد أضلاع الشكل (٥ – ١) ليس منتظماً وإنما هو شكل منحنى عام . لذلك نتبع الخطوات التالية لايجاد المساحة :

(١) أفرض أن ص = د (س) دالة معرفة في الفترة [أ ، ب] .

(٢) قسم الفترة [أ ، ب] إلى ن فترة جزئية متساوية بواسطة النقط $س_{٠}$ ، $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ..... ، $س_{ك}$ ، ...... $س_{ن-١}$ ، $س_{ن}$ بحيث يكون $س_{١} - س_{٠} = س_{٢} - س_{١}$ ...... $= س_{ن} - س_{ن-١} = \Delta$ س كما في الشكل (٥ – ٢) .



الشكل (٥ – ٢)

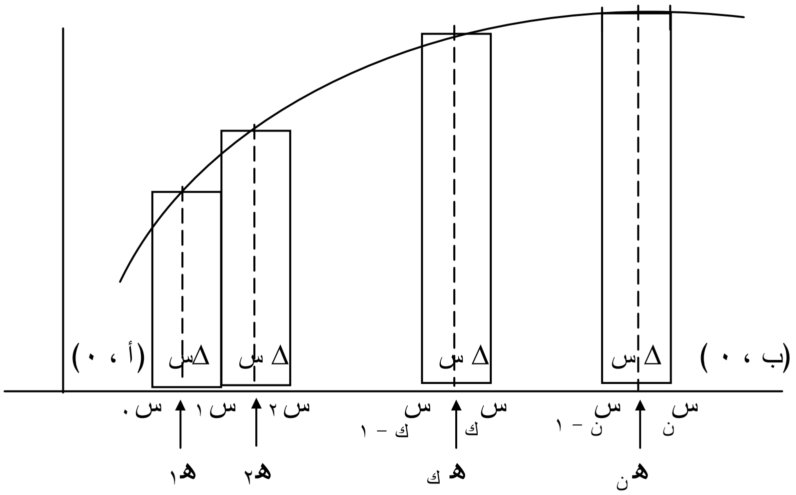
من الشكل (٥ – ٢) :

$$\text{س}_{.} = \text{أ} \quad ، \quad \text{س}_{\text{ن}} = \text{ب}$$

$$\text{س}_{\text{ك}} = \text{أ} + \text{ك}\ \Delta\ \text{س}$$

$$\Delta\ \text{س} = \frac{\text{س}_{\text{ن}} - \text{س}_{.}}{\text{ن}} = \frac{\text{ب} - \text{أ}}{\text{ن}}$$

(٣) أفرض $\text{هـ}_{١}$ ، $\text{هـ}_{٢}$ ، ......$\text{هـ}_{\text{ك}}$ ، .... $\text{هـ}_{\text{ن}}$ نقاط داخل الفترة [أ ، ب] بحيث $\text{هـ}_{١}$ تقع في [س. ، $\text{س}_{١}$] $\text{هـ}_{٢}$ تقع في [$\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$] وهكذا كما في الشكل (٥ – ٣)



الشكل (٥ – ٣)

∵ ص = د (س) فإن القيمة العددية لأطوال الأشكال (المستطيلة) ، الشكل (٥ – ٣) هى د ($هـ_١$) ، د ($هـ_٢$) ... ، د ($هـ_ك$) ... ، د ($هـ_ن$) على التوالى .

أما عرض هذه الاشكال فهو Δ س

∴ مساحة الشكل الأول = د ($هـ_١$) × Δ س

مساحة الشكل الثانى = د ($هـ_٢$) × Δ س

وهكذا

فإذا أردنا ايجاد المساحة الكلية بين المنحنى ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] فإننا نقوم بجمع مساحة كل الأشكال السابقة . فإذا أفترضنا أن $جـ_ن$ تمثل المساحة الكلية فإن :

$جـ_ن$ = د ($هـ_١$) Δ س + د ($هـ_٢$) Δ س + ... + د ($هـ_ن$) Δ س ...... (١)

لاحظ أنه كلما اقتربت Δ س من الصفر أقتربت مساحة المستطيلات من المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ص = د (س) والمحور السينى من س = أ إلى س = ب .

على ضوء ذلك فإن $ج_ن$ تمثل محصلة مساحة المستطيلات المتاحة على الفترات $[س_. ، س_١]$ ، $[س_١ ، س_٢]$ ، $[س_{ن-١} ، س_ن]$ والتى تمثل $د(هـ_١)$ ، $د(هـ_٢)$ ، ..... ، $د(هـ_ن)$ اطوالها وتمثل Δ س عرضها .

الآن عندما تؤول ن إلى ما لا نهاية فإن :

$$\Delta س = \frac{ب - أ}{ن}$$ تؤول إلى الصفر ، وبالتالى فإن :

$\lim_{ن \to \infty} ج_ن = ج$ تمثل المساحة المحصلة المحصورة بين منحنى الداله ص = د (س) وبين المحور السينى من س = أ إلى س = ب .

الآن ما علاقة ذلك بتكامل الداله ص = د (س) ؟ إذا كانت هنالك علاقة بين هذه المساحة وتكامل د (س) فهل هذا سيعنى أن التكامل سيكون وسيلة سهلة لايجاد مساحات لاشكال غير الأشكال الهندسية المتعارف عليها ؟هذا ما سيتضح من النظرية الأساسية للتكامل :

النظرية الأساسية للتكامل :

تقول النظرية الأساسية للتكامل إذا كانت :

$$ر(س) = \int د(س)\, د س$$

فإن :

$$ج = \lim_{ن \to \infty} ج_ن = ر(ب) - ر(أ) \quad \text{______} \quad (٢)$$

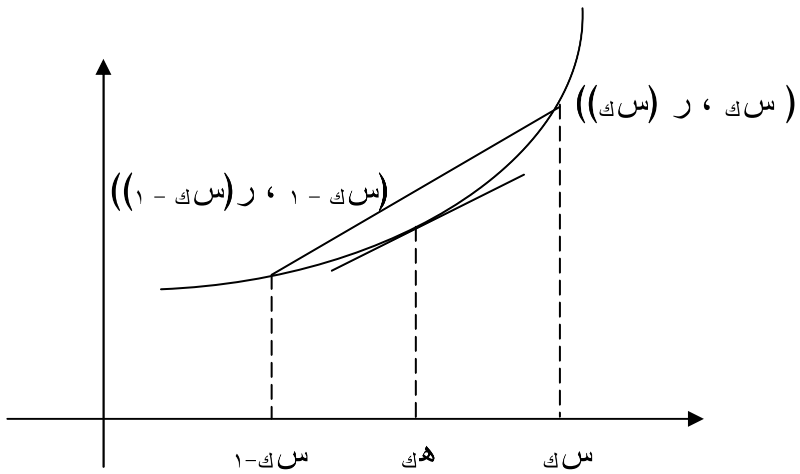
حيث $ج_ن$ معرفه في المعادلة (١) .

إثبات هذه النظرية بصورة عامة خارج نطاق هذا المقرر، ولكن دعنا للتأكد من صحتها في الحالة الخاصة التالية :

لنناقش الداله ر (س) في الفترة $(س_{ك-١} ، س_ك)$ ولتكن $هـ_ك$ هي النقطة التي تحقق المعادلة .

$$\frac{ر\,(\,س_{ك}\,) - ر\,(\,س_{ك-١}\,)}{\Delta\, س} = د\,(\,هـ_{ك}\,) \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_} \quad (٣)$$

المعنى الهندسى لذلك هو أن ميل المماس لمنحنى الداله ص = ر (س) عند $هـ_{ك}$ يساوى ميل الوتر الواصل بين ($س_{ك}$ ، ر ($س_{ك}$)) و($س_{ك-١}$ ، ر ($س_{ك-١}$)) (انظر الشكل (٥ – ٤)) وذلك ر′ (س) = د (س) .



الشكل (٥ – ٤)

من (٣) :

$$د\,(\,هـ_{ك}\,)\,\Delta\, س = ر\,(\,س_{ك}\,) - ر\,(\,س_{ك-١}\,)$$

$$\therefore\ ج_{ن} = \sum_{ك=١}^{ن} د\,(\,هـ_{ك}\,)\,\Delta\, س = \sum_{ك=١}^{ن} [\,ر\,(\,س_{ك}\,) - ر\,(\,س_{ك-١}\,)\,]$$

[ر(س$_{١}$) − ر(س$_{.}$)] + [ر(س$_{٢}$) − ر(س$_{١}$)] +...... + [ر(س$_{ن-١}$) − ر(س$_{ن-٢}$)] + [ر(س$_{ن}$) − ر(س$_{ن-١}$)]

وبعد فك الاقواس :

= − ر(س$_{.}$) + ر(س$_{ن}$)   ∵ س$_{.}$ = أ ، س$_{ن}$ = ب

∴ − ر(س$_{.}$) + ر(س$_{ن}$) = ر(ب) − ر(أ)

إذن : جـ$_{ن}$ = ر (ب) − ر (أ)

عليه فإن :

نها$_{ن \to \infty}$ جـ$_{ن}$ = ر (ب) − ر (أ)

الخلاصة :

إذا اردنا ايجاد محصلة المساحة المحصورة بين منحنى الداله ص = د (س) ومحور السينات بين س = أ و س = ب ، نتحصل أولاً على تكامل د (س) ، أى .

$\int$ د (س) د س = ر (س)

ثم تكون محصلة المساحة :

ر (ب) − ر (أ) . ونعبر عن ذلك بـــ :

$\int_{أ}^{ب}$ د (س) د س = ر (ب) − ر (أ)

حيث ر$'$ (س) = د (س) .

وهذا هو التكامل المحدد الذى سبق لك التعرف عليه .

تجدر الاشارة هنا إلى أنه من تعريف المجموع جـ$_{ن}$ فإن جـ$_{ن}$ تكون سالبة إذا كانت د (س) سالبة في الفترة [أ ، ب] وتكون موجبه إذا كانت د (س) موجبة في الفترة [أ ، ب] . أما إذا كانت د (س) سالبة في جزء من [أ ، ب] وموجبة في الجزء الآخر فإننا إما نحصل على قيمة سالبة لـــ جـ$_{ن}$

وإما موجبة . لذلك فإن التكامل المحدد يعطى محصلة المساحة المحصورة بين منحنى الداله ص= د (س) ومحور السينات من س = أ إلى س = ب .

مثال (١) :

جد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ص = $\text{س}^{٢}$ + ٣ ومحور السينات من س = ٢ إلى س = ٣

الحل :

الدالة ص = $\text{س}^{٢}$ + ٣ موجبة بين س = ٢ و س = ٣ إذن المساحة المطلوبة تعطى بالتكامل المحدد .

$$\int_{٢}^{٣} (\text{س}^{٢} + ٣)\,\text{د س} = \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٣\,\text{س}\right]_{٢}^{٣}$$

$$= \left[\frac{٣^{٣}}{٣} + ٣ \times ٣\right] - \left[\frac{٢^{٣}}{٣} + ٣ \times ٢\right]$$

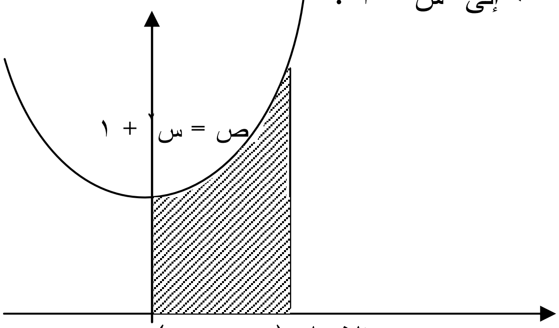
$$= \left[٩ + ٩\right] - \left[\frac{٨}{٣} + ٦\right] = ١٨ - ٨\frac{٢}{٣}$$

$$= ٩\frac{١}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

مثال (٢) :

احسب المساحة المحصورة بين منحنى الداله ص = $\text{س}^{٢}$ + ١ ومحور السينات من س = ٠ إلى س = ١ .

الحل :



الشكل (٥ – ٥)

الدالة ص = $\text{س}^{٢}$ + ١ دوماً موجبة بين س = ٠ وس = ١ إذاً المساحة المطلوبه تعطى بالتكامل المحدد .

$$\int_{٠}^{١} (\text{س}^{٢} + ١)\, \text{د س}$$

$$= \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س} \right]_{٠}^{١}$$

$$= \left(\frac{١}{٣} + ١ \right) - \left(\frac{٠}{٣} + ٠ \right) = ١\frac{١}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

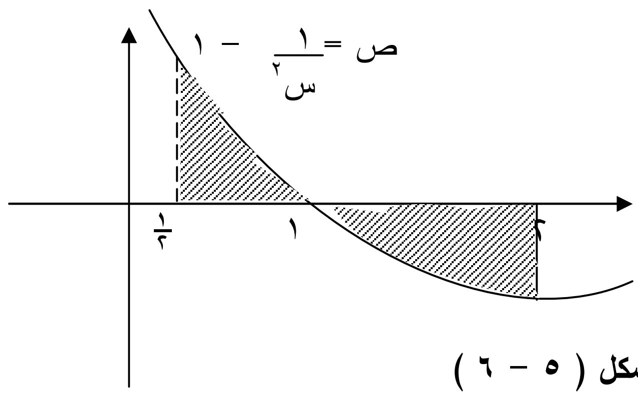
مثال (٣) :

احسب المساحة المحصورة بين منحنى الداله د (س) = $\frac{١}{\text{س}^{٢}}$ − ١ ومحور السينات من س = $\frac{١}{٢}$ إلى س = ٢.

الحل :

في الفترة [$\frac{١}{٢}$ ، ٢] فإن الداله تساوى صفر عند س = ١ ، أى أن د (١) = ٠ وأن الداله موجبه في [$\frac{١}{٢}$، ٢] وسالبة في [١ ، ٢] ، أنظر

الشكل (٥ – ٦) .



الشكل (٥ – ٦)

فالمساحة المطلوبة إذاً هى مجموع المساحتين المظللتين ، وهى :

$$\left| \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١ \right) \text{د س} \right| + \left| \int_{١}^{٢} \left(\frac{١}{\text{س}^{٢}} - ١ \right) \text{د س} \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{١}{\text{س}} - \text{س} \right]_{\frac{١}{٢}}^{١} \right| + \left| \left[-\frac{١}{\text{س}} - \text{س} \right]_{١}^{٢} \right|$$

$$= \left[(-١ - ١) - \left(-٢ - \frac{١}{٢} \right) \right] + \left| \left(-\frac{١}{٢} - ٢ \right) - (-١ - ١) \right|$$

$$= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١ \text{ وحدة مربعة}$$

لاحظ أنه إذا اجرينا التكامل المحدد مباشرة فإننا نحصل على :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{س^{2}} - 1 \right) د\,س = \left[-\frac{1}{س} - س \right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$= \left[-\frac{1}{2} - 2 \right] - \left[-2 - \frac{1}{2} \right] = 0$$

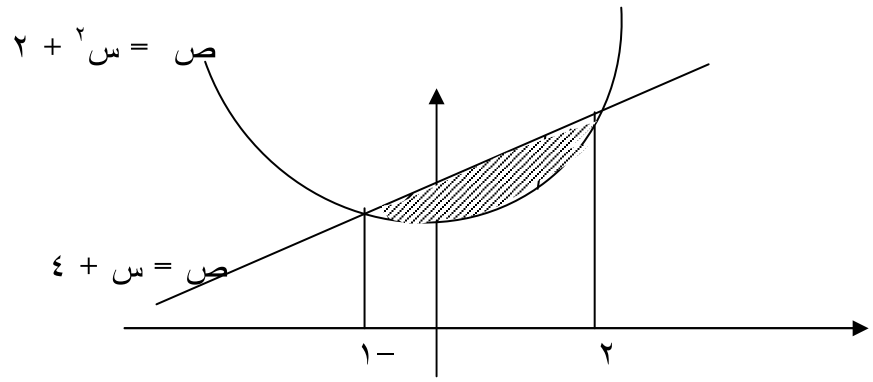
وذلك لانها محصلة لقيمتين متساويتين ومختلفتين في الاشارة بينما المساحة المطلوبة هى المجموع الجبرى لمساحتين موجبتين .

مثال (٤) :

احسب المساحة المحصورة بين المنحنيين ص = س^{٢} + ٢ ، ص = س + ٤ .

الحل :

نرسم الشكل العام للمنحنيين لنعرف المساحة المطلوبه وهى المظللة في الشكل (٥ – ٧) .



الشكل (٥ – ٧)

لتكن $م_١$ هى المساحة المحصورة بين ص = س + ٤ ومحور السينات من س = −١ إلى س = ٢ [عند س = −١ ، ٢ يتقاطع المنحنيان] و$م_٢$ هى المساحة المحصورة بين ص = $س^٢$ + ٢ ومحور السينات من س = −١ إلى س = ٢ . إذن المساحة بين المنحنيين = $م_١ - م_٢$.

$$= \int_{-١}^{٢} (س + ٤)\, د س - \int_{-١}^{٢} (س^٢ + ٢)\, د س$$

$$= \int_{-١}^{٢} (س - س^٢ + ٢)\, د س \quad \text{... لماذا ؟}$$

$$= \left[\frac{س^٢}{٢} - \frac{س^٣}{٣} + ٢ س \right]_{-١}^{٢}$$

$$= \left(\frac{٤}{٢} - \frac{٨}{٣} + ٤ \right) - \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - ٢ \right)$$

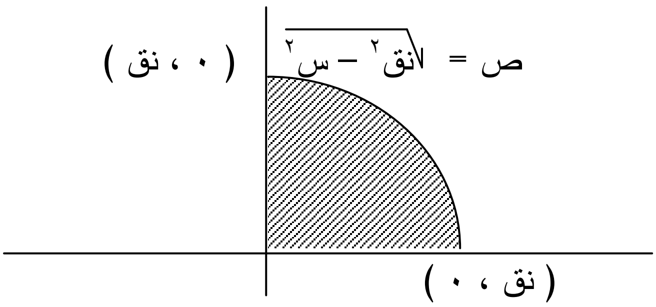
$$= \frac{١٠}{٣} - \left(- \frac{٧}{٦} \right) = \frac{٩}{٢} \quad \text{وحدة مربعة}$$

مثال (٥) :

اثبت أن مساحة الدائرة التى نصف قطرها نق تساوى π $نق^٢$.

الحل :

في الشكل (٥ − ٨) الجزء المظلل يمثل ربع مساحة الدائرة التى نصف قطرها نق .



الشكل (٥ − ٨)

وهـــو عبـــارة عـــن المساحـــة المحصـــورة بيـــن منحـــنى الدالـــه ص = $\sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}$ ومحور السينات من س = ٠ إلى س = نق ، أى أن ربع مساحة الدائرة تساوى :

$$\int_{٠}^{\text{نق}} \sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}\ \text{د س}$$

ضع س = نق جتا ع

∴ ص = نق جا ع

د س = نق جا ع د ع

عند س = ٠ ، ع = $\frac{\pi}{٢}$

عند س = نق ، ع = ٠

$$\therefore \int_{٠}^{\text{نق}} \sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{س}^{٢}}\ \text{د س} = \text{نق} \sqrt{\text{نق}^{٢} - \text{نق}^{٢}\ \text{جتا}^{٢}\ \text{ع}}\ \text{جا ع د ع}$$

$$= \text{نق} \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{نق} \sqrt{١ - \text{جتا}^{٢}\ \text{ع}}\ \text{جا ع د ع}$$

$$= \text{نق}^{٢} \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جا}^{٢}\text{ع} \;\text{دع}$$

$$= \frac{١}{٢}\,\text{نق}^{٢} \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (\,١ - \text{جتا}\;٢\text{ع}\,)\;\text{دع}$$

$$= \frac{١}{٢}\,\text{نق}^{٢}\left[\,\text{ع} - \frac{١}{٢}\,\text{جا}\;٢\text{ع}\,\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = \frac{١}{٢}\,\text{نق}^{٢}\left[\frac{\pi}{٢}\right] = \frac{\pi\,\text{نق}^{٢}}{٤}$$

$$\therefore \text{مساحة الدائرة} = ٤ \times \frac{\pi\,\text{نق}^{٢}}{٤} = \pi\,\text{نق}^{٢}$$

تمرين (٥ – ٢)

(١) احسب المساحات المبينة في الآتي :

أ/ بين ص = س^{٢} + ٣ س + ٢ ، ومحور السينات من س = ١ إلى س = ٤

ب/ ص = س^{٢} – ٧ س + ٦ ، والمحور السينى .

ج/ بين ص = (س – ١)^{٢} – ٢٥ ، والمحور السينى .

(د) بين ص = ١٣ – ٢ س و ص = ٢ س + $\frac{٩}{\text{س}^{٢}}$ الواقعة في الربع الأول .

(٢) ارسم المنحنى ص = س^{٣} – ٣ س^{٢} – ٦ س + ٨ واحسب المساحة المحصورة بينه وبين المحور السينى .

(٣) المنحنى ص = أ (س – ب) (س – ج) (س – د) يمر بالنقاط (‎–١ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، (٠ ، ٢٤) . جد معادلته والمساحة المحصورة بينه وبين المحور السينى .

(٤) إذا كان ميل المماس عند أى نقطة لمنحنى ما يساوى ٣ $س^{٢}$ − ١٢ س + ٣ ويمر المنحنى بالنقطة (٢ ، ٠) فاحسب المساحة بين المنحنى ، المحور السينى بين س = ٢ ، س = ٤ .

(٥) منحنى يمر بالنقطة (٣ ، ١) فإذا كان ميل المماس عند أى نقطة عليه يساوى $س^{٢}$ − ٤ س + ٣ فاحسب المساحة المحصورة بينه وبين المحور السينى وقيم س عند نهايتيه الصغرى والعظمى .

(٦) إذا كان ص″ عند أى نقطة على منحنى ما تساوى مقداراً ثابتاً وكان المنحنى يمر بالنقطتين أ (١ ، ٢) ، ب (−٣ ، ٠) ، وميل المماس عند النقطة أ يساوى $-\frac{١}{٢}$. فجد معادلة المنحنى والمساحة المحصورة بينه وبين ص = ٢ س .

(٧) جد قيمة كل من التكاملات المحددة الآتية :

(أ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ جا س د س

(ب) $ص^{٢}$ جتا $ص^{٣}$ د ص

(جـ) $س^{٢}\sqrt{س^{٣} + ١}$ د س

الوحدة السادسة

الدائرة

هداف الوحدة السادسة

بعد دراسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن :-

١- يتعرف معادلة الدائرة.

٢- يتعرف الصورة العامة لمعادلة الدائرة .

٣- إيجاد مركز ونصف قطر الدائرة إذا علمت معادلتها .

٤- إيجاد معادلة الدائرة التي تحقق شروط معينة مثل الدائرة التي تمر بثلاث نقاط .

٥- إيجاد معادلة الدائرة إذا علم نهايتا قطر فيها

٦- إيجاد معادلة الدائرة التي تمر بنقطتين ومركزها يقع على مستقيم معلوم .

٧- معادلة المماس للدائرة من نقطة عليها .

٨- إيجاد طول المماس المرسوم لدائرة من نقطة خارجها .

(٦) الدائـــرة

(٦ – ١) معادلة الدائرة :

عرفنا سابقاً أن مجموعات من نقط المستوى الإحداثى تكوّن بشروط معينة اشكالاً هندسية مثل المستقيم ، القطعة المستقيمة ، المنحنى ، واوجدنا معادلة المستقيم وهى العلاقة التى تربط احداثيى أى نقطة (س ، ص) عليه . والصورة العامة لمعادلة المستقيم هى :

أ س + ب ص + جـ = ٠ (أ ، ب ، جـ ∈ ح) .

والآن سندرس مجموعة جزئية أخرى من المستوى لها صفة مميزة تشكل هندسياً ما يعرف بالدائرة ونعلم أن تعريف الدائرة :

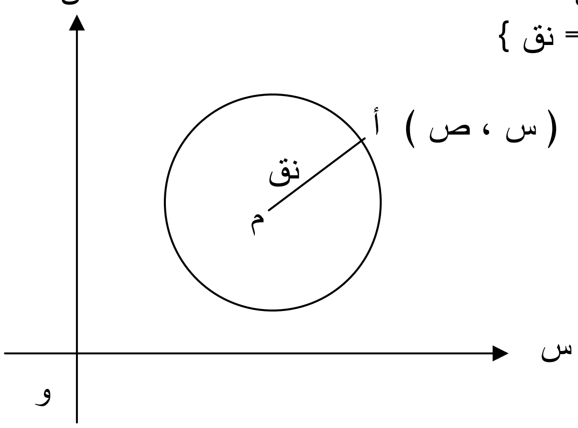
هى مجموعة كل النقط في المستوى التى تبعد بعداً متساوياً عن نقطة معلومة .

يسمى هذا البعد نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز (نق) . وتسمى النقطة المعلومة (مركز الدائرة) .

فإذا رمزنا لمجموعة نقط الدائرة بالرمز ن ولمركزها بالرمز م ، أ (س ، ص) أى نقطة على الدائرة [الشكل (٦ – ١)] .

نجد أن الصفة المميزة لها هى :

ن = { أ (س ، ص) : $\overline{\text{أ م}}$ = نق }



الشكل (٦ – ١)

فإذا كــان مركــز الدائــرة م هــى النقطــة (د ، هـ) والنقطــة أ (س ، ص) أى نقطة تقع على الدائرة التى نصف قطرها = نق .

∴ $\overline{أم}$ = نق

$$\overline{أم} = \sqrt{(س - د)^{2} + (ص - هـ)^{2}} = نق$$

وبتربيع الطرفين

$$(س - د)^{2} + (ص - هـ)^{2} = نق^{2}$$

وتكون الصفة المميزة للدائرة ن :

$$ن = \{ أ (س ، ص) : (س - د)^{2} + (ص - هـ)^{2} = نق^{2} \}$$

وعليه فإن معادلة الدائرة التى مركزها (د ، هـ) وطول نصف قطرها نق هى :

$$(س - د)^{2} + (ص - هـ)^{2} = نق^{2}$$

حيث (س ، ص) أى نقطة على الدائرة .

فإذا كان مركز الدائرة عند نقطة الأصل (٠ ، ٠) تصبح معادلتها في الصورة :

$$(س - ٠)^{2} + (ص - ٠)^{2} = نق^{2}$$

أى $س^{2} + ص^{2} = نق^{2}$

مثال (١) :

جد معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٣ .

الحل :

بالتعويض عن نق = ٣ تكون معادلة الدائرة هى :

$س^{2} + ص^{2} = ٩$

مثال (٢) :

جد معادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، − ٣) ، ونصف قطرها ٤ وحدات .

الحل :

∵ (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

وبالتعويض عن (د ، هـ) بالنقطة (٢ ، ‾٣) ، نق = ٤ فإن معادلة الدائرة المطلوبة هى :

(س − ٢)^{٢} + (ص − ‾٣)^{٢} = ٤^{٢}

أو (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٦

مثال (٣) :

جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التى معادلتها :

(س + ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

الحل :

بوضع المعادلة على الصورة : (س − د)^{٢} + (ص − هـ)^{٢} = نق^{٢}

تصبح : (س − −١)^{٢} + (ص − ٠)^{٢} = ٥^{٢}

∴ المركز (−١ ، ٠) ، نق = ٥

تمرين (٦ − ١)

(١) اكتب معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٦ وحدات .

(٢) اكتب معادلة الدائرة التى مركزها (٠ ، −٣) وطول نصف قطرها ٧ وحدات .

(٣) اكتب معادلة الدائرة التى مركزها (−٥ ، ٢) وطول نصف قطرها $\sqrt{٧}$ وحدة .

(٤) جد مركز وطول نصف قطر الدائرة في كل من الحالات التالية :

(أ) $س^٢ + (ص − ١)^٢ = ٤$

(ب) $(س + ٤)^٢ + ص^٢ = ١$

(جـ) $(س + ٣)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ٦٤$

(٥) جد معادلة الدائرة التـــى مركزهـــا (−٢ ، −٧) وتمـــر بالنقطـــة (٢ ، −٤) .

(٦) جد معادلة الدائرة التى $\overline{أب}$ قطـــر فيهـــا حيـــث أ (٧ ، ١٢) ، ب (−٥ ، −٤) .

(٦ − ٢) الصورة العامة لمعادلة الدائرة :

فيما سبق وجدنا أن معادلة الدائرة التى مركزها النقطة م (د ، هـ) ونصف قطرها نق هى :

$(س − د)^٢ + (ص − هـ)^٢ = نق^٢$ حيث د ، هـ ∋ ح (١)

وبازالة الأقواس تصبح المعادلة (١) :

$س^٢ − ٢د س + د^٢ + ص^٢ − ٢هـ ص + هـ^٢ = نق^٢$

وبوضع د = − ل ، هـ = − ك

$\therefore س^٢ + ٢ ل س + ل^٢ + ص^٢ + ٢ ك ص + ك^٢ − نق^٢ = ٠$

أى :

$س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^٢ + ك^٢ − نق^٢ = ٠$

وبوضع $ل^٢ + ك^٢ − نق^٢ = جـ$

تصبح المعادلة على الصورة :

$س^٢ + ص^٢ + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠$ (٢)

وحيث أن $ل^٢ + ك^٢ − نق^٢ = جـ$

$\Leftarrow ل^٢ + ك^٢ − جـ = نق^٢$

$\therefore نق = \sqrt{ل^٢ + ك^٢ − جـ}$

بشرط أن $ل^٢ + ك^٢ − جـ > ٠$

والمعادلة (٢) تسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة وبذلك تكون :

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى :

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠$

حيث ل ، ك ، جـ ثوابت بشرط أن :

$ل^{٢} + ك^{٢} - جـ > ٠$

مركزها ($-$ ل ، $-$ ك) ، نصف قطرها

$نق = \sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - جـ}$

نلاحظ في الصورة العامة لمعادلة الدائرة ما يلى :

(١) معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢}$.

(٢) خالية من الحد المشتمل على س ص .

(٣) إذا كان $ل^{٢} + ك^{٢} - جـ = ٠$ فالمعادلة تمثل نقطة وحيدة أما إذا كان $ل^{٢} + ك^{٢} - جـ < ٠$ فالمعادلة لاتمثل دائرة ومجموعة حلها $= \varnothing$

مثال (١) :

تحقق أن المعادلة :

$س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٦ ص - ١٢ = ٠$

تمثل دائرة وعين مركزها وطول نصف قطرها .

الحل :

بمقارنة المعادلة : $س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٦ ص - ١٢ = ٠$

بالصورة العامة : $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠$

نجد أن : $٢ ل = ٤ \Leftarrow ل = ٢$

$٢ ك = ٦ \Leftarrow ك = ٣$

$جـ = {}^{-}١٢$

$ل^{٢} + ك^{٢} - جـ = ٢^{٢} + ٣^{٢} + ١٢ = ٢٥ > ٠$

∴ المعادلة تمثل دائرة .

مركزها (− ل ، − ك) = (−٢ ، −٣)

نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ − ج}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات

مثال (٢) :

جد المركز ونصف القطر للدائرة التى معادلتها :

٤ س^٢ + ٤ ص^٢ + ٤ س + ٢٤ ص + ٩ = ٠

الحل :

نقسم أولاً على ٤ لجعل معامل س^٢ = معامل ص^٢ = ١

س^٢ + ص^٢ + س + ٦ ص + $\frac{٩}{٤}$ = ٠

∴ ٢ ل = ١ ⇐ ل = $\frac{١}{٢}$

٢ ك = ٦ ⇐ ك = ٣

∴ المركز = (− $\frac{١}{٢}$ ، −٣)

نق = $\sqrt{(-\frac{١}{٢})^٢ + (-٣)^٢ - \frac{٩}{٤}}$

= $\sqrt{\frac{١}{٤} + ٩ - \frac{٩}{٤}}$ = $\sqrt{\frac{١ + ٣٦ - ٩}{٤}}$ = $\sqrt{\frac{٢٨}{٤}}$ = $\sqrt{٧}$

تمرين (٦ – ٢)

(١) جد المركز ونصف القطر لكل من الدوائر التالية :

(أ) س^{٢} + ص^{٢} – ٢ س – ٦ ص – ٢٦ = ٠

(ب) س^{٢} + ص^{٢} – ٤ س – ٤ ص + ٨ = ٠

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} – ١٠ص = ٠

(د) س^{٢} + ص^{٢} – أ س + أ ص = ٠

(هـ) ٩س^{٢} + ٩ص^{٢} + ٢٤ص – ٣٨ = ٠

(و) س^{٢} + ٢ س + ٥ = ص (٤ – ص)

(ز) ص (١ – ص) = س^{٢}

(٢) جد نصف قطر الدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س – ١٠ ص + ٢١ = ٠

وجد بعد مركزها عن المستقيم س – ٢ ص + ٤ = ٠

(٣) جد قيمة ك التى تجعل طول نصف قطر الدائرة ن التالية ٦ وحدات .

ن : س^{٢} + ص^{٢} – ٦ س + ٢ ك ص – ٢٣ = ٠

(٤) دائرة معادلتها س^{٢} + ص^{٢} + ٢ أ س + ٢ أ ص – ١٧= ٠

جد قيمة أ بحيث يكون طول نصف قطرها ٥ وحدات ثم عين مركزها.

(٦ – ٣) الدائرة التى تحقق شروطاً معينة :

عرفنا أن الدائرة يمكن أن تتعين إذا علمنا مركزها ونصف قطرها بالمعادلة :

(س – د)^{٢} + (ص – هـ)^{٢} = نق^{٢}

وهى معادلة تشتمل على ثلاثة ثوابت د ، هـ ، نق . وإذا تأملنا معادلة الدائرة في الصورة العامة .

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س +٢ ك ص + جـ = ٠

نجد أنها تشتمل على ثلاثة ثوابت أيضاً ل ، ك ، جـ . لذلك تتعين معادلة الدائرة بأى من الصورتين إذا عرفنا الثوابت الثلاثة . ويجب لمعرفتها وجود ثلاث

معادلات جبرية مستقلة فيما بينها . أى ثلاثة شروط هندسية مستقلة . لذلك تتعين الدائرة إذا حققت ثلاثة شروط هندسية مستقلة .

(أ) معادلة الدائرة التى تمر بثلاث نقاط :

إذا علمنا إحداثيات ثلاث نقاط تقع على الدائرة وأردنا إيجاد معادلتها يمكن التوصل إلى المعادلة باحدى هذه الطرق .

أولاً : نضع الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} + ٢\,\text{ل س} + ٢\,\text{ك ص} + \text{جـ} = ٠$$

وبما أن الدائرة تمر بالنقاط الثلاث ، فكل نقطة منها تحقق هذه المعادلة.

فبالتعويض نحصل على ثلاث معادلات في المجاهيل ل ، ك ، جـ .

وبحل المعادلات آنياً نحصل على قيم هذه الثوابت .

ثانياً : الطريقة الثانية :

نعلم أن مركز الدائرة هو نقطة تقاطع المنصفين العموديين لوترين في الدائرة غير متوازيين .

إذن نوجد معادلة المنصف العمودى للوتر الواصل بين النقطتين الأولى والثانية .

وبالمثل نوجد معادلة المنصف العمودى للوتر الواصل بين النقطتين الثانية والثالثة مثلاً .

وبذلك يكون مركز الدائرة هو نقطة تقاطع المنصفين ونصف قطرها هو بعد مركزها عن أى من النقاط المعلومة .

ثالثاً : طريقة أخرى لتعيين معادلة الدائرة المارة بثلاثة نقاط ، ولتكن النقاط الثلاث هى أ $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$ ، ب $(\text{س}_{٢} ، \text{ص}_{٢})$ ، جـ $(\text{س}_{٣} ، \text{ص}_{٣})$.

وان معادلة المستقيم أ ب هى : $\text{م س} + \text{ن ص} + \text{و} = ٠$

$$\left.\begin{array}{l}\text{م س}_{١} + \text{ن ص}_{١} + \text{و} = ٠ \\ \text{م س}_{٢} + \text{ن ص}_{٢} + \text{و} = ٠\end{array}\right\} \quad (١)$$

فإذا اعتبرنا المعادلة :

$$(\text{س} - \text{س}_{١})(\text{س} - \text{س}_{٢}) + (\text{ص} - \text{ص}_{١})(\text{ص} - \text{ص}_{٢}) + \text{ى}(\text{م س} + \text{ن ص} + \text{و}) = ٠ \quad (٢) \,.$$

حيث ى مقدار ثابت سيعين فيما بعد ، فإن هذه المعادلة تمثل دائرة ، لانها من الدرجة الثانية فيها معاملا $س^٢$ ، $ص^٢$ متساويان وخالية من الحد المشتمل على س ص . وتمر بكل من النقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$) لأن كلاً من النقطتين تحققها .

فإذا مرت الدائرة الممثلة بالمعادلة (٢) بالنقطة ($س_٣$، $ص_٣$) كذلك فإن :
($س_٣$ − $س_١$) ($س_٣$ − $س_٢$) ($ص_٣$ − $ص_١$) ($ص_٣$ − $ص_٢$) + ى (م $س_٣$ + ن $ص_٣$ + و) = ٠ (٣) . ومن هذه المعادلة يمكن حساب قيمة ى .

لاحظ أن الطريقة الاخيرة هى أقصر الطرق وأسهلها .

مثال (١) : جد معادلة الدائرة التى تمر بالنقاط :
أ (−٢ ، ٥) ، ب (٤ ، ٩) ، جـ (٢ ، −١)

الحل :

معادلة المستقيم أ ب هى : $\frac{ص - ٩}{س - ٤} = \frac{٤}{٦}$

⇐ ٢ س − ٣ ص + ١٩ = ٠

∴ معادلة الدائرة يمكن كتابتها على الصورة :
(س + ٢) (س − ٤) + (ص − ٥) (ص − ٩) + ى (٢س−٣ص +١٩) = ٠
وحيث أنها تمر بالنقطة جـ

∴ (٢ + ٢) (٢ − ٤) + (−١ − ٥) (−١ − ٩) + ى (٢ × ٢ − ٣ × −١ + ١٩) = ٠

∴ −٨ + ٦٠ + ى × ٢٦ = ٠

∴ ى = −٢

∴ معادلة الدائرة هى :
(س + ٢) (س − ٤) + (ص − ٥) (ص − ٩) − ٢ (٢س − ٣ ص + ١٩) = ٠
أى $س^٢$ + $ص^٢$ − ٦س − ٨ ص − ١ = ٠

مثال (٢) :

جد معادلة الدائرة التى تمر بالنقاط :

(٤ ، –١) ، (–٢ ، ١) ، (٦ ، ٥)

الحل :

باستخدام الطريقة الأولى ، نفرض أن المعادلة هى :

س٢ + ص٢ + ٢ ل س +٢ ك ص + جـ = ٠

النقطة (٤ ، –١) تقع على الدائرة

٤٢ + (–١)٢ + ٢ ل × ٤ + ٢ ك × –١ + جـ = ٠

⇐ ٨ ل – ٢ ك + جـ = –١٧ (١)

وبالمثل من النقطتين (–٢ ، ١) ، (٦ ، ٥) نحصل على المعادلتين :

–٤ ل + ٢ ك + جـ = –٥ (٢)

١٢ ل + ١٠ ك + جـ = –٦١ (٣)

وبحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) آنياً نحصل على :

ل = –٢ ، ك = –٣ ، جـ = –٧

∴ المعادلة المطلوبة :

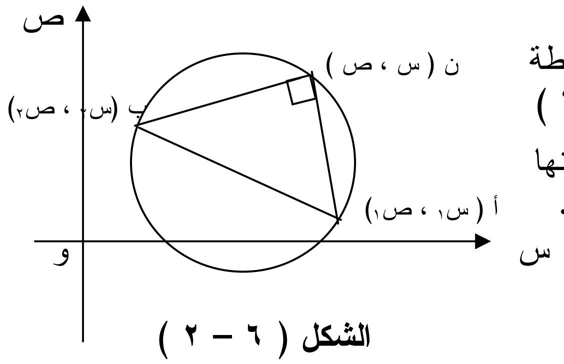
س٢ + ص٢ – ٤ س – ٦ ص – ٧ = ٠

(ب) معادلة الدائرة إذا علم نهايتا قطر فيها :

إذا فرضنا أن نهايتى أحد اقطار الدائرة هما النقطتان أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) .

وأن ن (س ، ص) أى نقطة على الدائرة . الشكل (٦–٢)

نجد أن ∠أ ن ب = ٩٠° لأنها مرسومة على نصف دائرة .



الشكل (٦ – ٢)

فإذا كان $م_1$ ، $م_2$ ميلى $\overline{أ ن}$ ، $\overline{ب ن}$ على الترتيب فإن $م_1 م_2 = -1$
أى أن :

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} \times \frac{ص - ص_2}{س - س_2} = -1$$

$\therefore$ معادلة الدائرة المطلوبة هى :

$$(س - س_1)(س - س_2) + (ص - ص_1)(ص - ص_2) = 0$$

مثال (٣) :

جد معادلة الدائرة التى نهايتا قطر فيها النقطتان :
$(-3 ، 2)$ ، $(4 ، -5)$

الحل :

$$(س - س_1)(س - س_2) + (ص - ص_1)(ص - ص_2) = 0$$

أى $(س - -3)(س - 4) + (ص - 2)(ص - -5) = 0$

$\Leftarrow (س + 3)(س - 4) + (ص - 2)(ص + 5) = 0$

$\Leftarrow س^2 + ص^2 - س + 3 ص - 22 = 0$

(جـ) معادلة الدائرة المارة بنقطتين ومركزها يقع على مستقيم معلوم :

في هذه الحالة يتم التوصل إلى قيم الثوابت ل ، ك ، جـ بحل المعادلات الثلاث . اثنان يتم التوصل اليهما بتعويض النقطتين في معادلة الدائرة المفروضة ، والثالثة بتعويض احداثيات المركز المفروض ($-ل$ ، $-ك$) في معادلة المستقيم ، أو بطريقة أخرى بايجاد معادلة المنصف العمودى للوتر الواصل بين النقطتين وحلها آنياً مع معادلة المستقيم المعلوم لأن نقطة تقاطعهما تمثل مركز الدائرة ثم يكمل الحل .

مثال (٤) :

جد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطتين (−٢ ، ٤) ، (٦ ، ٨) ويقع مركزها على المستقيم س − ص + ١ = ٠

الحل :

من المعادلة العامة للدائرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س +٢ ك ص + جـ = ٠

النقطة (−٢ ، ٤) تقع على الدائرة

∴ − ٤ ل + ٨ ك + جـ = −٢٠ (١)

النقطة (٦ ، ٨) تقع أيضاً عليها

∴ ١٢ ل + ١٦ ك + جـ = −١٠٠ (٢)

المركز (− ل ، − ك) يقع على المستقيم س − ص + ١ = ٠

∴ − ل + ك = −١ (٣)

بحل المعادلات (١) ، (٢) ، (٣) آنياً نحصل على :

ل = −٣ ، ك = −٤ ، جـ = ٠

وتكون المعادلة المطلوبة :

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ٨ ص = ٠

" استخدم الطريقة الثانية لحل هذا المثال "

تمرين (٦ − ٣)

(١) جد معادلة الدائرة التى تمر بالنقاط :

(أ) (٠ ، ٠) ، (٨ ، ٠) ، (٠ ، −٦)

(ب) (٤ ، ٠) ، (−٢ ، ٥) ، (٠ ، −٢)

(جـ) (٠ ، ١) ، (٥ ، ١) ، (٢ ، −٣)

(د) (−٣ ، ٢) ، (−٢ ، ٧) ، (٢ ، ١)

(٢) جد معادلة الدائرة التى نهايتا قطر فيها النقطتان :

(أ) (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٠)

(ب) (٦ ، ١) ، (-٢ ، -٣)
(جـ) (-١ ، ٢) ، (-٢ ، ١)
(د) (½ ، ١) ، (-٥ ، ٧)

(٣) اثبت أن النقاط
أ (٠ ، ٠) ، ب (٣ ، ١) ، جـ (١ ، ٢) ، د (٢ ، -١)
رؤوس رباعى دائرى .

(٤) جد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (-٣ ، ٧) ويقع مركزها على المحور السينى .

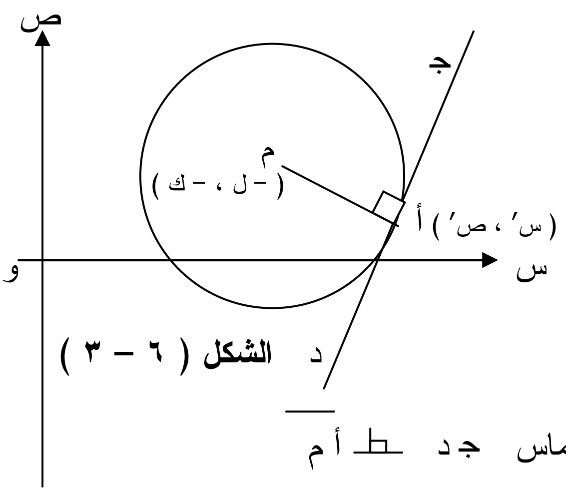
(٥) جد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطتين (٥ ، -٣) ، (١ ، ٠) ويقع مركزها على المستقيم ٢ س - ٣ ص - ٦ = ٠

(٦) جد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطتين (٥ ، -٢) ، (-٢ ، ١) ويقع مركزها على المستقيم ٣ س + ص + ٢ = ٠

(٦ - ٤) معادلة المماس لدائرة عند نقطة عليها :

إن وضع أى مستقيم بالنسبة لدائرة معينة هو إما أن يقطع المستقيم الدائرة في نقطتين مختلفتين ، ويسمى المستقيم في هذه الحالة قاطعاً للدائرة . وإما أن يشترك المستقيم مع الدائرة في نقطتين منطبقتين في نقطة أ مثلاً ويسمى المستقيم في هذه الحالة مماساً للدائرة وتسمى النقطة أ نقطة التماس. وإما ألاّ يشترك المستقيم مع الدائرة في أى نقطة . فإذا كان المستقيم مماساً للدائرة فإن بعده عن مركز الدائرة في هذه الحالة يكون مساوياً لنصف قطر الدائرة فالمستقيم جـ د في الشكل (٧ - ٣) مماساً للدائرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س +٢ ك ص + جـ = ٠ عند النقطة أ (س′ ، ص′) وحيث أن مركز الدائرة م (- ل ، - ك) ، فإن ميل نصف القطر المار بنقطة التماس هو :

$$\frac{\text{ص}' + \text{ك}}{\text{س}' + \text{ل}}$$



الشكل (٦ – ٣)

وبما أن المماس جـ د ⊥ أ م

∴ ميل المماس جـ د = $-\frac{\text{س}' + \text{ل}}{\text{ص}' + \text{ك}}$

∴ معادلة المماس :

ص − ص′ = $-\frac{\text{س}' + \text{ل}}{\text{ص}' + \text{ك}}$ (س − س′)

⇐ (ص − ص′) (ص′ + ك) = − (س′ + ل) (س − س′)

⇐ (ص − ص′) (ص′ + ك) + (س′ + ل) (س − س′) = ٠

⇐ ص ص′ + ك ص − ص′٢ − ك ص′ + س س′ + ل س − س′٢ − ل س′ = ٠

⇐ س س′ + ص ص′ + ل س + ك ص = س′٢ + ص′٢ + ل س′ + ك ص′

وباضافة المقدار ل س′ + ك ص′ + جـ للطرفين ينتج :

س س′ + ص ص′ + ل (س + س′) + ك (ص + ص′) + جـ = س′٢

+ ص′٢ + ٢ ل س′ + ٢ ك ص′ + جـ

وبما أن النقطة (س′ ، ص′) تقع على الدائرة ، فإنها تحقق معادلتها .

∴ س′^٢ + ص′^٢ + ٢ ل س′ + ٢ ك ص′ + جـ = ٠

∴ الطرف الأيسر من معادلة المماس يساوى الصفر

∴ معادلة المماس :

س س′ + ص ص′ + ل (س + س′) + ك (ص + ص′) + جـ = ٠

مثال (١) :

جد معادلتى المماس والعمودى للدائرة :

س^٢ + ص^٢ + ٨ س − ١٠ ص + ٢١ = ٠

عند النقطة (‾٢ ، ١) الواقعة عليها .

الحل :

ل = ٤ ، ك = −٥

معادلة المماس هى :

−٢ س + ص + ٤ (س − ٢) − ٥ (ص + ١) + ٢١ = ٠

أى س − ٢ ص + ٤ = ٠

∴ ميل المماس = $\frac{-١}{-٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ميل العمودى = ‾٢

∴ معادلة العمودى : ص − ١ = −٢ (س + ٢)

أى ص + ٢ س + ٣ = ٠

مثال (٢) :

تحقق أن النقطة (٢ ، −٣) تقع على الدائرة

٢ س^٢ + ٢ ص^٢ − س + ٥ ص − ٩ = ٠ ثم جد معادلة المماس المرسوم عندها لهذه الدائرة .

الحل :

بوضع س = ٢ ، ص = −٣ في الطرف الأيمن من معادلة الدائرة نحصل على :

٨ + ١٨ − ٢ − ١٥ − ٩ = ٢٦ − ٢٦ = ٠
= الطرف الأيسر

∴ النقطة (٢ ، ⁻٣) تقع على الدائرة . بالقسمة على ٢ لجعل معاملى س^{٢} ، ص^{٢} يساويان الواحد الصحيح :

س^{٢} + ص^{٢} − $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٥}{٢}$ ص − $\frac{٩}{٢}$ = ٠

∴ ل = − $\frac{١}{٤}$ ، ك = $\frac{٥}{٤}$ ، جـ = $\frac{-٩}{٢}$

∴ معادلة المماس :

٢ س − ٣ ص − $\frac{١}{٤}$ (س + ٢) + $\frac{٥}{٤}$ (ص − ٣) − $\frac{٩}{٢}$ = ٠

∴ ٢ س − ٣ ص − $\frac{١}{٤}$ س − $\frac{١}{٢}$ + $\frac{٥}{٤}$ ص − $\frac{١٥}{٤}$ − $\frac{٩}{٢}$ = ٠

٧ س − ٧ ص − ٣٥ = ٠

∴ س − ص − ٥ = ٠

تمرين (٦ − ٤)

(١) جد معادلات المماسات للدائرة :
س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ عند النقاط التالية
أ (٣ ، ٤) ، ب (٥ ، ٠) ، جـ (−٤ ، ٣) ، د (٠ ، −٥)

(٢) جد معادلات المماسات للدوائر الآتية عند النقاط المعينة .
(أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٦ ص + ٣ = ٠ عند النقطة (٥ ، ٤)
(ب) س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ ص = ٠ عند النقطة (٣ ، ١)
(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٥ ص = ٠ عند النقطة (٠ ، ٠)
(د) ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} + ٨ س − ٨ ص − ١٠ = ٠ عند النقطة (٠ ، ٥)

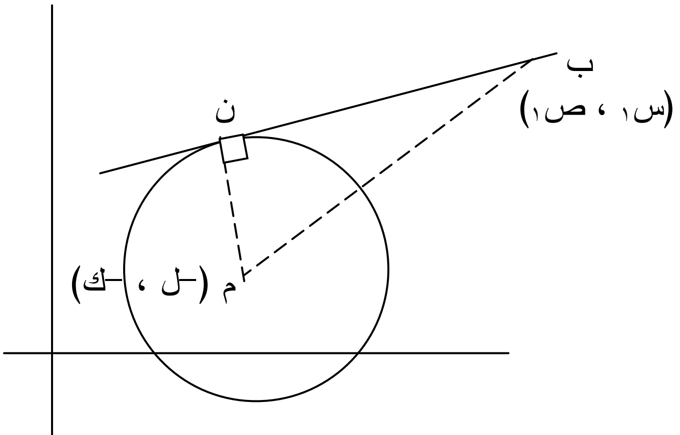
(٣) بين أن المستقيم ل : $س + ٢ ص = ١٢$ مماس للدائرة
ن : $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س = ٤ ص - ٨$

(٤) جد معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم ل : $٢ س = ٣ ص + ١٣$

(٥) جد معادلة الدائرة التى مركزها (١ ، ٢) وتمس المستقيم ل : $٤ س - ٣ ص + ١٢ = ٠$

(٦ – ٥) طول المماس المرسوم للدائرة من نقطة خارجها :

نفرض أن المطلوب ايجاد طول المماس المرسوم للدائرة :
$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠$
من النقطة ب ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) . فإذا كانت م مركز الدائرة ن نقطة التماس شكل (٦– ٤) .



الشكل (٦ – ٤)

∴ نجد أن :
$\overline{ب ن}^{٢} = \overline{ب م}^{٢} - \overline{م ن}^{٢}$

∴ $\overline{ب ن}^{٢} = (س_{١} + ل)^{٢} + (ص_{١} + ك)^{٢} - \overline{م ن}^{٢}$
وبما أن $\overline{م ن}^{٢} = نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} - جـ$

$\therefore \overline{ب ن}^{٢} = س_{١}^{٢} + ٢ل\,س_{١} + ل^{٢} + ص_{١}^{٢} + ٢ك\,ص_{١} + ك^{٢} - ل^{٢} - ك^{٢} + ج$

$= س_{١}^{٢} + ص_{١}^{٢} + ٢ل\,س_{١} + ٢ك\,ص_{١} + ج$

أى أن مربع طول المماس للدائرة نحصل عليه من معادلة الدائرة بعد جعلها صفرية وجعل معاملى $س^{٢}$ ، $ص^{٢}$ الوحدة ثم التعويض عن س بالقيمة $س_{١}$ وعن ص بالقيمة $ص_{١}$ في الطرف الأيمن للمعادلة .

فإذا كان ناتج التعويض موجباً كان المماس حقيقياً أى أن النقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) تقع خارج الدائرة .

أما إذا كان ناتج التعويض سالباً فإن المماس تخيلياً وأن النقطة تقع داخل الدائرة .

وواضح أنه إذا كان مساوياً الصفر فإن النقطة تقع على الدائرة .

مثال (١) :

جد طول المماس المرسوم للدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ من النقطة (−٢ ، −٩) .

الحل :

طول المماس $= \sqrt{٤ + ٨١ - ٤} = \sqrt{٨١} = ٩$ وحدات

مثال (٢) :

جد طول المماس من النقطة (٢ ، −٣) إلى الدائرة :

$س^{٢} + ص^{٢} - ٢\,س - ٨\,ص + ٢١ = ٠$

الحل :

مربع طول المماس $= س_{١}^{٢} + ص_{١}^{٢} + ٢\,س_{١} - ٨\,ص_{١} + ٢١$

حيث $س_{١} = ٢$ ، $ص_{١} = \overline{٣}$

$\therefore$ مربع طول المماس $= ٤ + ٩ - ٤ + ٢٤ + ٢١ = ٥٤$

$\therefore$ طول المماس $= \sqrt{٥٤} = ٣\sqrt{٦}$ وحدة

تمرين (٦ – ٥)

جد طول المماس لكل من الدوائر التالية من النقطة الموضحة في كل حالة :

(١) س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ من النقطة (٣ ، ٦)

(٢) س^{٢} + ص^{٢} = ٤٠ من النقطة (−٥ ، −٨)

(٣) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٥ ص = ٠ من النقطة (−٢ ، ٣)

(٤) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٨ ص = ٣٧ من النقطة (٣ ، −٥)

(٥) (س− ٣)^{٢} + (ص− ٤)^{٢} = ٤ من النقطة (١ ، ٢)

(٦) ٢ (س^{٢} + ص^{٢}) −س + ٣ ص + ١ = ٠ من النقطة (−١ ، ١)

(٧) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ ص = ٢ س + ٤ من النقطة (٥ ، ٦)

(٨) س^{٢} − ٤ س = ٢ ص − ص^{٢} − ٤ من النقطة (−٢ ، ٣)

الوحدة السابعة

مجموعة الأعداد المركبة

أهداف الوحدة السابعة

بعد دارسة هذه الوحدة يتوقع من الطالب أن يكون قادراً على أن :-

١. يمثل الأعداد المركبة بيانياً .
٢. يمثل الأعداد المركبة بالصورة المثلثية (بالصورة القطبية) .
٣. يتعرف التمثيل البياني والتمثيل المثلثي (الصورة القطبية) للعدد المركب.
٤. يتعرف خواص الصورة القطبية للعدد المركب .
٥. يتعرف القوى ونظرية دي موافر .
٦. يجد جذور الأعداد المركبة .
٧. يحل معادلات الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد المركبة .
٨. يتعرف الجذور التكعيبية للواحد الصحيح .

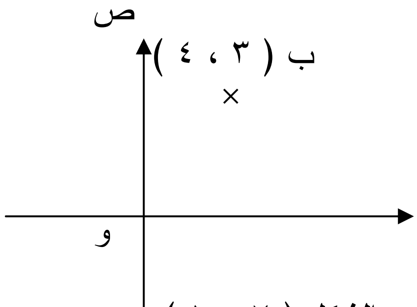
(٧ – ١) التمثيل البياني والصورة القطبية للعدد المركب :

(أ) التمثيل البياني :

مر بنا سابقاً أن العدد المركب أ + ب ت يمكن التعبير عنه في صورة زوج مرتب (أ ، ب) مسقطه الأول الجزء الحقيقي ، ومسقطه الثاني الجزء التخيلي ؛ لذلك يمكن تمثيل الأعداد المركبة بنقط في مستوى إحداثيات يمثل المحور السيني فيه الأجزاء الحقيقية للأعداد المركبة ، ويمثل المحور الصادي فيه الأجزاء التخيلية للأعداد المركبة .

إذن تلاحظ بسهولة أن كل نقطة من المستوى تقابل عدداً مركباً واحداً ، والعكس كل عدد مركب يتمثل بنقطة واحدة من المستوى المذكور . يسمى هذا المستوى مستوى الأعداد المركبة أو مستوى آرقند ، كما يطلق عادة على المحور السيني في هذه الحالة اسم المحور الحقيقي وعلى المحور الصادي اسم المحور التخيلي . وواضح أن جميع الأعداد المركبة من النوع (س ، ٠) تقع على المحور الحقيقي ، وجميع الأعداد من النوع (٠ ، ص) تقــع علــى المحــور

التخيلي ففي الشكل (٧ – ١) العدد المركب الممثل بالنقطة (٣ ، ٤) مثلاً يمكن أن يقرأ إما (٣ ، ٤) أو ٣ + ٤ ت . ولهذا فإننا قد نشيــر أحيانا إلى العدد المركب س + ص ت بالنقطة (س ، ص) .



الشكل (٧ – ١)

مثال (١) :

اكتب كلاً من الأعداد التالية على صورة زوج مرتب ثم مثلها بيانياً على المستوى المركب :

(٣ + ٥ ت) ، – ٣ + ٥ ت ، –٣ – ٥ ت ، ٣ – ٥ ت ، ت ، – ٢ ت ، ٤

الحل :

العدد (٣ + ٥ ت) يكافئ (٣ ، ٥)

العدد − ٣ + ٥ ت يكافئ (−٣ ، ٥)

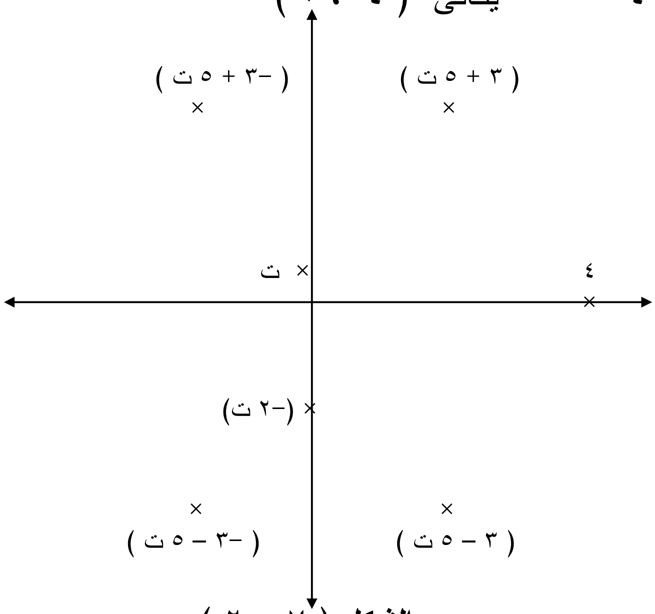
العدد −٣ − ٥ ت يكافئ (−٣ ، −٥)

العدد ٣ − ٥ ت يكافئ (٣ ، −٥)

العدد ت يكافئ (٠ ، ١)

العدد − ٢ ت يكافئ (٠ ، −٢)

العدد ٤ يكافئ (٤ ، ٠)



الشكل (٧ − ٢)

مثال (٢) :

اثبت أن النقاط أ ، ب ، جـ ، و ، والتي تمثل الأعداد المركبة (٣ + ٤ ت) ، (−٥ + ٦ ت) ، (−٢ + ١٠ ت) ، (صفر) على الترتيب هي رؤوس متوازي أضلاع .

الحل :

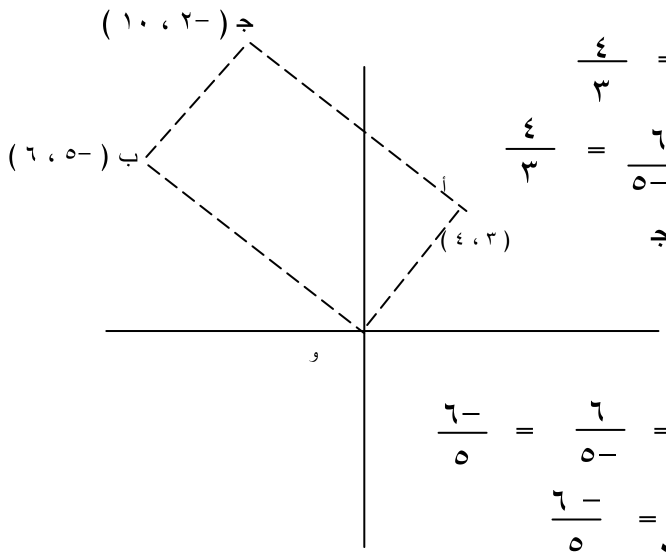
النقطة أ (٣ ، ٤) تمثل العدد المركب (٣ + ٤ ت)

النقطة ب (⁻٥ ، ٦) تمثل العدد المركب (− ٥ + ٦ت)

النقطة جـ (−٢ ، ١٠) تمثل العدد المركب (−٢ + ١٠ ت)

النقطة و (٠ ، ٠) تمثل العدد المركب صفر .

الشكل (٦ − ٣) تمثيل لهذه الأعداد :



ميل و أ = $\frac{٤ - ٠}{٣ - ٠}$ = $\frac{٤}{٣}$

ميل ب جـ = $\frac{١٠ - ٦}{-٢ - -٥}$ = $\frac{٤}{٣}$

∴ ميل و أ = ميل ب جـ

∴ و أ // ب جـ

ميل أ جـ = $\frac{١٠ - ٤}{-٢ - ٣}$ = $\frac{٦}{-٥}$ = $\frac{-٦}{٥}$

ميل و ب = $\frac{٦ - ٠}{-٥ - ٠}$ = $\frac{-٦}{٥}$

∴ ميل أ جـ = ميل و ب

الشكل (٧ − ٣)

∴ أ جـ // و ب

∴ الشكل و أ جـ ب متوازي أضلاع

ملاحظة :

تلاحظ في المثال السابق أن :

٣ + ٤ ت مُثل بالنقطة أ ، −٥ + ٦ ت مُثل بالنقطة ب ، وأن مجموعهما (٣ + ٤ ت) + (−٥ + ٦ ت) = −٢ + ١٠ ت يمثل بالنقطة جـ .

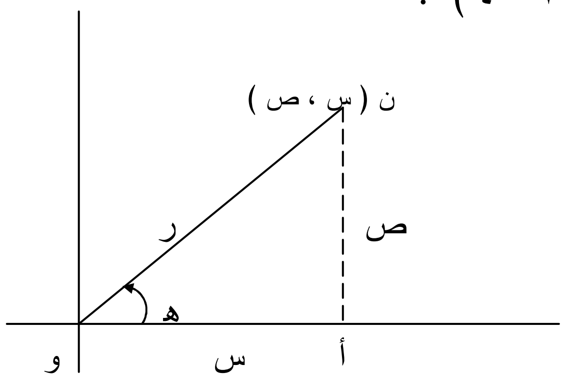
ماذا تلاحظ في النقاط التي تمثل الأعداد المركبة التالية (٥ – ٣ ت) ، (–٦ – ٤ ت) ، (– ١ – ٧ ت) ، صفر .

بصورة عامة :

إذا مثل عددان مركبان بالنقطتين أ ، ب في المستوى المركب فإن مجموعهما يمثل بالنقطة جـ الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع و أ جـ ب حيث و نقطة الأصل .

(ب) التمثيل المثلثى (الصورة القطبية) للأعداد المركبة :

العدد المركب ع = س + ت ص يقابله في مستوى ارقند النقطة (س ، ص) كما في الشكل (٧ – ٤) :



الشكل (٧ – ٤)

من الشكل :

ر = $\sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}}$ يسمى ر ($\overline{\text{و ن}}$) القيمة المطلقة للعدد المركب ع أو طول ع أو المقياس للعدد ع ويرمز له بالرمز | ع | أو ر .

ر $\neq$ ٠ إلا إذا كان س = ص = ٠

> العدد المركب الوحيد الذي طوله الصفر هو العدد الصفري

$\angle$ هـ تسمى زاوية العدد المركب أو السعة للعدد المركب لاحظ أن زاوية العدد المركب قد تكون هـ أو هـ + ٢ ك π (ك $\in$ ص) .

من الشكل :

س = ر جتا هـ ....(١)

ص = ر جا هـ ....(٢)

ع = س + ص ت .....(٣)

بتعويض (١) و (٢) في المعادلة (٣) :

$$\boxed{\text{ع = ر (جتا هـ + ت جا هـ)}}$$

وهى ما تعرف بالصورة المثلثية أو الصورة القطبية للعدد المركب وتكتب أحياناً في الصورة المختصرة [ر ، هـ] .

يكتب العدد المركب (ع) بصورتين :

الصورة الأولى : ع = س + ت ص وتسمى بالصورة الديكارتية ويمثل في المستوى الديكارتى بالنقطة (س ، ص) .

الصورة الثانية : ع = ر (جتا هـ + ت جا هـ)

حيث ر ≡ القيمة المطلقة للعدد المركب

هـ ≡ زاوية العدد المركب أو السعة

وتسمى بالصورة القطبية وتمثل في المستوى الديكارتى (شكل آرقند) بالصورة [ر ، هـ]

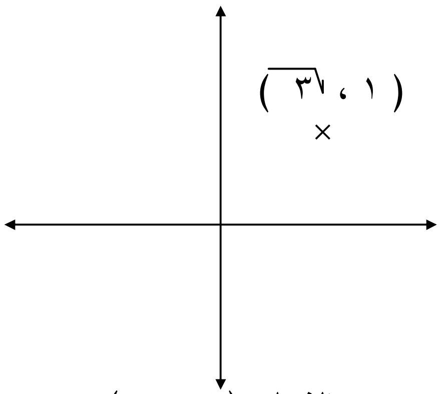
مثال (٣) :

بين العدد المركب ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت على المستوى الديكارتى ثم مثله بالصورة القطبية .

الحل :

ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

يمثل المستوى الديكارتى بالنقطة (١ ، ٣)



الشكل (٧ – ٥)

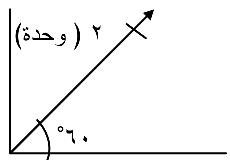
$$\text{ر} = \sqrt{\text{س}^{2} + \text{ص}^{2}} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{جتا هـ} = \frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{1}{2} \quad ، \quad \text{جا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الزاوية التي جيب تمامها $\frac{1}{2}$ وجيبها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي ٦٠°

∴ ع = ٢ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

ويمثل في شكل آرقند بالصورة [٢ ، ٦٠°]



ويمكن التحويل من الصورة الديكارتية إلى القطبية بالطريقة التالية :

ر = ٢

$$\therefore \text{ع} = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت} \right)$$

∴ جتاهـ $= \frac{١}{٢}$ ، جا هـ $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ∴ هـ = ٦٠°

∴ ع = ٢ (جتا ٦٠° + ت جا٦٠°)

ويمكن في ضوء العلاقات السابقة تحويل العدد المركب من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية أو العكس .

مثال (٤) :

إذا كانت الصورة القطبية للعدد المركب هي [٤ ، $\frac{\pi^{د}}{٦}$] اكتب الصورة الديكارتية له .

الحل :

ر = ٤ ، هـ = $\frac{\pi^{د}}{٦}$

س = ٤ جتا $\frac{\pi}{٦}$ = ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ $\sqrt{٣}$

ص = ٤ جا $\frac{\pi}{٦}$ = ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

∴ الصورة الديكارتية له هي : ٢ $\sqrt{٣}$ + ٢ ت

مثال (٥) :

عبر عن المقدار $\frac{٨ \sqrt{٢}}{١ + ت}$ بالصورة القطبية ثم مثل العدد الناتج على شكل آرقند .

الحل :

نحول أولاً إلى الصورة أ + ب ت

$$\frac{٨ \sqrt{٢}}{١ + ت} = \frac{٨ \sqrt{٢} \, (١ - ت)}{(١ + ت)(١ - ت)} = \frac{٨ \sqrt{٢} \, (١ - ت)}{٢}$$

$$= ٤ \sqrt{٢} - ٤ \sqrt{٢} \, ت$$

ويوضع المقدار في الصورة القطبية

أ = ٤ $\sqrt{٢}$ ، ب = − ٤ $\sqrt{٢}$

ر = $\sqrt{٣٢ + ٣٢}$ = ٨

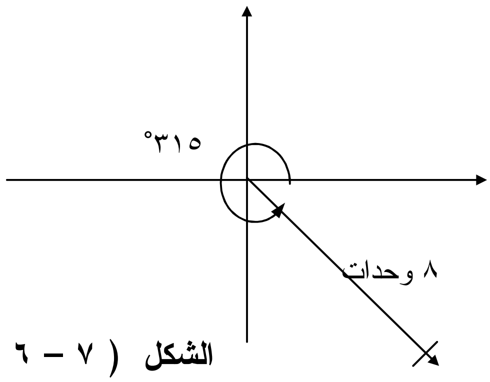
∴ ٤ $\sqrt{٢}$ − ٤ $\sqrt{٢}$ ت = ٨ ($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ت)

∴ جتا هـ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، جا هـ = − $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∴ هـ = ٣١٥°

∴ ٤ $\sqrt{٢}$ − ٤ $\sqrt{٢}$ ت = ٨ (جتا ٣١٥° + ت جا ٣١٥°)

ويكون العدد ممثلاً على شكل آرقند كما في الشكل (٦ − ٦) التالي :



الشكل (٧ − ٦)

تمرين (٧ − ١)

(١) عيّن على المستوى المركب الأعداد الآتية :

(أ) $ع_{١}$ = ١ + ٤ ت (ب) $ع_{٢}$ = ١ − ٤ ت (جـ) $ع_{٣}$ = ٦ ت

(د) $ع_{٤}$ = −٢ − ٤ ت

(٢) جد أطوال الأعداد المركبة التالية :

(أ) $\sqrt{٣}$ + ت (ب) ٣ + ٤ ت (جـ) ١ + $\sqrt{٣}$ ت

(د) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{ت}{\sqrt{٢}}$

(٣) جد السعة لكل من الأعداد التالية :

(أ) $-\sqrt{٣} + ت$ (ب) $\sqrt{٣} - ت$ (جـ) $\sqrt{٣} + ت$

(د) $-\sqrt{٣} - ت$

(٤) اكتب كلاً من الأعداد التالية في الصورة القطبية .

(أ) $٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ (ب) $٥\sqrt{٣} - ٥\,ت$

(جـ) $\frac{٤}{\sqrt{٢}} + ٢\sqrt{٢}\,ت$ (د) -٨

(٥) اكتب في الصورة الديكارتية :

(أ) $[\,٨ ، ٦٠^\circ\,]$ (ب) $[\,٤ ، ١٢٠^\circ\,]$ (جـ) $[\,٣ ، \frac{-\pi}{٦}^{د}\,]$

(د) $[\,٣ ، \frac{٣\pi}{٢}^{د}\,]$

(٦) عبر عن الأعداد التالية في الصورة القطبية ثم مثلها بيانياً .

(أ) $٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ (ب) $-٥ + ٥\,ت$ (جـ) $-٦ - \sqrt{٢}\,ت$

(د) $-٣\,ت$

(٧ – ٢) بعض خواص الصورة القطبية للعدد المركب :

عرفنا سابقاً كيف يمكن إيجاد حاصل ضرب عددين مركبين في الصورة الديكارتية ، ولنر حاصل ضربهما عندما يكون العددان في الصورة القطبية ، فالعددان :

$ع_١ = ر_١ \,(\, جتا\, هـ_١ + ت\, جا\, هـ_١ \,)$

$ع_٢ = ر_٢ \,(\, جتا\, هـ_٢ + ت\, جا\, هـ_٢ \,)$

فإن حاصل ضربهما :

$ع_١\, ع_٢ = ر_١\, ر_٢ \,(\, جتا\, هـ_١ + ت\, جا\, هـ_١ \,)\,(\, جتا\, هـ_٢ + ت\, جا\, هـ_٢ \,)$

$= ر_١\, ر_٢ \,(جتا\, هـ_١ جتا\, هـ_٢ + ت\, جا\, هـ_١ جتا\, هـ_٢ + ت\, جا\, هـ_٢ جتا\, هـ_١ - جا\, هـ_١ جا\, هـ_٢)$

$= ر_١\, ر_٢ \,[جتا\, هـ_١ جتا\, هـ_٢ - جا\, هـ_١ جا\, هـ_٢] + ت[جتا\, هـ_١ جا\, هـ_٢ + جا\, هـ_١ جتا\, هـ_٢]$

$= ر_١\, ر_٢ \,[\, جتا\,(هـ_١ + هـ_٢\,) + ت\, جا\,(\, هـ_١ + هـ_٢\,)\,]$

أى أن حاصل ضرب عددين مركبين عدد مركب مقياسه (طوله) يساوى حاصل ضرب المقياسين وسعته (زاويته) تساوى مجموع الزاويتين .

مثلاً :

٤ (جتا ٣٠ + ت جا ٣٠) × ٨ (جتا ٦٠ + ت جا ٦٠)

= ٣٢ (جتا ٩٠ + ت جا ٩٠)

= ٣٢ (٠ + ت) = ٣٢ ت

ومن القاعدة السابقة يمكننا استخلاص بعض الخواص والنتائج منها :

(أ) بما أن زاوية أي عدد من الشكل (س ، ٠) تساوى (الصفر + ٢ ك π) . وعلى هذا فإن حاصل ضرب أي عدد من هذا النوع بعدد مركب آخر لايغير زاوية الأخير . فمثلاً زاوية (٥ + ٣ ت) لا تختلف عن زاوية ٦(٥+ ٣ ت). أي أن ضرب العدد المركب بعدد حقيقي لا يغير من زاوية العدد المركب.

(ب) إذا كان ع = س + ت ص ، فإننا نعلم أن :

$ع \bar{ع} = (س + ت ص)(س - ت ص) = س^{٢} + ص^{٢} = ر^{٢}$

حيث أن | ر | تساوى مقياس العدد المركب وهو عدد حقيقي سعته(صفر + ٢كπ) .

ومن هذا نستنتج أن زاوية مرافق عدد مركب تساوى زاوية هذا العدد بعد تغيير إشارتها (إذ أن مجموعهما الصفر) وأن طول أي عدد يساوى طول مرافق هذا العدد إذ أن حاصل ضربهما $ر^{٢}$.

(جـ) لما كان $\frac{١}{ع} = \frac{\bar{ع}}{ع \bar{ع}} = \frac{١}{|ع|^{٢}} \cdot \bar{ع}$

فمقلوب العــدد المركــب يســاوى حاصل ضرب مرافقــه بالعــدد الموجب . $\frac{١}{|ع|^{٢}}$ ومن هذا نجد أن زاوية مقلوب العدد المركب تساوى زاوية العدد بعد تغيير إشارتها . كما أن طول مقلوب أي عدد مركب يساوى مقلوب طول هذا العدد حيث أن :

$$\left|\frac{١}{ع}\right| = \left|\frac{١}{|ع|^{٢}} \bar{ع}\right| = \frac{١}{|ع|^{٢}} |\bar{ع}| = \frac{١}{|ع|^{٢}} \cdot |ع| = \frac{١}{|ع|}$$

(د) بما أن حاصل قسمة عدد مركب $ع_{١}$ على آخر $ع_{٢}$ هو حاصل ضرب الأول بمقلوب الثاني .

فإن طول $\frac{ع_١}{ع_٢}$ يساوى حاصل قسمة طول $ع_١$ على طول $ع_٢$ وأن زاوية حاصل القسمة تساوى حاصل طرح زاوية $ع_٢$ من زاوية $ع_١$.

فإذا كان $ع_١ = [\,٨ \text{ ، } ٦٠^\circ\,]$ ، $ع_٢\ [\,٤ \text{ ، } ٤٥^\circ\,]$

$$\frac{ع_١}{ع_٢} = \left[\,\frac{٨}{٤} \text{ ، } (٦٠^\circ - ٤٥^\circ)\,\right] = [\,٢ \text{ ، } ١٥^\circ\,]$$

مثال (١) :

جد قيمة ما يأتي :

$$(\text{أ})\ ٨\left(\text{جتا } \frac{\pi}{٣} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٣}\right) \times ٦\left(\text{جتا } \frac{\pi}{٤} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٤}\right)$$

$$(\text{ب})\ ١٢\left(\text{جتا } ٢٤٠^\circ + \text{ت جا } ٢٤٠^\circ\right) \div ٦\left(\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ\right)$$

الحل :

$$(\text{أ})\ ٨\left(\text{جتا } \frac{\pi}{٣} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٣}\right) \times ٦\left(\text{جتا } \frac{\pi}{٤} + \text{ت جا } \frac{\pi}{٤}\right)$$

$$= ٤٨ \text{ جتا } \left(\frac{\pi}{٣} + \frac{\pi}{٤}\right) + \text{ت جا } \left(\frac{\pi}{٣} + \frac{\pi}{٤}\right)$$

$$= ٤٨\left(\text{جتا } \frac{٧\pi}{١٢} + \text{ت جا } \frac{٧\pi}{١٢}\right)$$

$$(\text{ب})\ ١٢\left(\text{جتا } ٢٤٠^\circ + \text{ت جا } ٢٤٠^\circ\right) \div ٦\left(\text{جتا } ٣٠^\circ + \text{ت جا } ٣٠^\circ\right)$$

$$= \frac{١٢}{٦}\left[\text{جتا } (٢٤٠^\circ - ٣٠^\circ) + \text{ت جا } (٢٤٠^\circ - ٣٠^\circ)\right]$$

$$= ٢\left(\text{جتا } ٢١٠^\circ + \text{ت جا } ٢١٠^\circ\right)$$

مثال (٢) :

إذا كان $ع_١ = [٨ ، ٦٠°]$ ، $ع_٢ = [٤ ، ١٢٠°]$ جد ما يأتي :

(أ) $ع_١ \cdot ع_٢$ (ب) $\frac{ع_١}{ع_٢}$ (جـ) $\frac{١}{ع_١}$ (د) $ع_١^٢$

الحل :

(أ) $ع_١ \cdot ع_٢ = [٨ ، ٦٠°] \times [٤ ، ١٢٠°] = [٣٢ ، ١٨٠°]$

(ب) $\frac{ع_١}{ع_٢} = [٨ ، ٦٠°] \div [٤ ، ١٢٠°] = [٢ ، -٦٠°]$

(جـ) $\frac{١}{ع_١} = \frac{١}{[٨ ، ٦٠°]} = [\frac{١}{٨} ، -٦٠°]$

(د) $ع_١^٢ = [٨ ، ٦٠°]^٢ = [٦٤ ، ١٢٠°]$

تمرين (٧ – ٢)

(١) إذا كان $ع_١ = ٣ \left(جتا \frac{\pi}{٦} + ت\ جا \frac{\pi}{٦} \right)$

$ع_٢ = ١٢ \left(جتا \frac{٥\pi}{٣} + ت\ جا \frac{٥\pi}{٣} \right)$

جد :

(أ) $ع_٢ \cdot ع_١$ (ب) $\frac{ع_٢}{ع_١}$ (د) $ع_١^٢$ (جـ) $\frac{١}{ع_٢}$

(٢) جد ناتج ما يلي :

(أ) ٦ (جتا $\frac{\pi}{٣}$ + ت جا $\frac{\pi}{٣}$) × ٢ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$)

(ب) ٨ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°) ÷ ٤ (جتا ٣٠° – ت جا ٣٠°)

(جـ) ٣ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°) × ٢ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

(د) [٣ (جتا هـ + ت جا هـ)]^{٢}

(هـ) ٣ (جتا ٤٠° + ت جا ٤٠°) × ٤ (جتا ٨٠° + ت جا ٨٠°)

(٧ – ٣) القوى ونظرية دي موافر :

لقد تم في الدرس السابق اثبات قاعدة الضرب التالية :

إذا كان :

$ع_{١}$ = $ر_{١}$ (جتا $هـ_{١}$ + ت جا $هـ_{١}$)

$ع_{٢}$ = $ر_{٢}$ (جتا $هـ_{٢}$ + ت جا $هـ_{٢}$)

فإن :

$ع_{١}$ ٠ $ع_{٢}$ = $ر_{١}$ $ر_{٢}$ [جتا ($هـ_{١}$ + $هـ_{٢}$) + ت جا ($هـ_{١}$ + $هـ_{٢}$)]

وبالتالي يمكن استنتاج العلاقات التالية بسهولة إذا كان $ع_{١}$ = $ع_{٢}$ = ع حيث ع = ر (جتا هـ + ت جا هـ) فإن :

$ع^{٢}$ = ر (جتا هـ + ت جا هـ) ٠ ر (جتا هـ + ت جا هـ)

= $ر^{٢}$ (جتا ٢هـ + ت جا ٢هـ)

وكذلك $ع^{٣}$ = $ع^{٢}$ ٠ ع = $ر^{٢}$ (جتا ٢هـ + ت جا ٢هـ) ٠ ر (جتا هـ + ت جا هـ)

= $ر^{٣}$ (جتا ٣هـ + ت جا ٣هـ)

وهكذا يكون :

$ع^{ن}$ = $ر^{ن}$ (جتا ن هـ + ت جا ن هـ)

تسمى هذه الصيغة الأخيرة بنظرية دي موفير ويمكن التعبير عنها في الصورة $[\text{ر} ، \text{هـ}]^{\text{ن}} = [\text{ر}^{\text{ن}} ، \text{ن هـ}]$.

مثال (١) :

إذا كان $\text{ع} = ٥ + ٥\sqrt{٣}\ \text{ت}$

جد : $\text{ع}^{٣}$

الحل :

من الأفضل كتابة العدد في الصورة القطبية حيث :

$$\text{ر} = \sqrt{٥^{٢} + (٥\sqrt{٣})^{٢}} = ١٠$$

$$\text{ع} = ١٠ \left(\frac{٥}{١٠} + \frac{٥\sqrt{٣}}{١٠}\ \text{ت} \right)$$

$$= ١٠ \left(\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\ \text{ت} \right)$$

$$\text{جتا هـ} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{جا هـ} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\therefore \text{هـ} = \frac{\pi}{٣}$$

$$\therefore \text{ع} = \left[١٠ ، \frac{\pi}{٣} \right] \Leftarrow \text{ع}^{٣} = \left[١٠^{٣} ، \frac{٣\pi}{٣} \right] = [١٠^{٣} ، \pi]$$

$$= ١٠٠٠ [\text{جتا } \pi + \text{ت جا } \pi] = -١٠٠٠$$

مثال (٢) :

إذا كان ع = ١ + ت فاحسب ع^{١٠}

الحل :

ع = (١ + ت) ⇐ ر = $\sqrt{٢}$

∴ ع = $\sqrt{٢}$ ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت)

ع = $\sqrt{٢}$ (جتا $\frac{\pi}{٤}$ + ت جا $\frac{\pi}{٤}$) = [$\sqrt{٢}$ ، $\frac{\pi}{٤}$]

∴ ع^{١٠} = [($\sqrt{٢}$)^{١٠} ، $\frac{١٠\pi}{٤}$] = [٣٢ ، $\frac{٥\pi}{٢}$] = [٣٢ ، $\frac{\pi}{٢}$]

∴ ع^{١٠} = ٣٢ (جتا $\frac{\pi}{٢}$ + ت جا $\frac{\pi}{٢}$) = ٣٢ ت

مثال (٣) :

مستخدماً نظرية دى موافر اثبت صحة العلاقات المثلثية التالية :

جتا ٢ هـ = جتا^{٢} هـ − جا^{٢} هـ

جا ٢ هـ = ٢جا هـ جتا هـ

جتا ٣ هـ = ٤جتا^{٣} هـ − ٣جتا هـ

جا ٣ هـ = ٣جا هـ − ٤جا^{٣} هـ

الحل :

من القانون

[ر (جتا هـ + ت جا هـ)]^{ن} = ر^{ن} (جتا ن هـ + ت جا ن هـ)

⇐ ر^{ن} (جتا ن هـ + ت جا ن هـ) = ر^{ن} (جتا هـ + ت جا هـ)^{ن}

⇐ جتا ن هـ + ت جا ن هـ = (جتا هـ + ت جا هـ)^{ن}

بوضع ن = ٢

جتا ٢ هـ + ت جا ٢ هـ = (جتا هـ + ت جا هـ)^{٢}

= جتا^{٢}هـ − جا^{٢}هـ + ٢ت جتا هـ جا هـ

ومنه نستنتج أن :

جتا ٢هـ = جتا^{٢} هـ − جا^{٢} هـ

جا ٢هـ =٢ جا هـ جتا هـ

أما إذا وضع ن = ٣ فإننا نجد :

جتا ٣هـ + ت جا ٣ هـ = (جتا هـ + ت جا هـ)^{٣}

= (جتا^{٢}هـ − جا^{٢}هـ + ٢ ت جا هـ جتا هـ) (جتا هـ + ت جا هـ)

= جتا^{٣}هـ − جا^{٢}هـ جتا هـ − ٢ جا^{٢} هـ جتا هـ + ت (جتا^{٢}هـ جاهـ − جا^{٣} هـ + ٢ جا هـ جتا^{٢} هـ)

∴ جتا ٣ هـ = جتا^{٣} هـ − ٣ جا^{٢} هـ جتا هـ

= ٤ جتا^{٣} هـ − ٣ جتا هـ (بوضع جا^{٢} هـ = ١ − جتا^{٢} هـ)

جا ٣ هـ = ٣ جتا^{٢} هـ جا هـ − جا^{٣}هـ

= ٣ جا هـ − ٤ جا^{٣} هـ (بوضع جتا^{٢} هـ = ١ − جا^{٢} هـ)

تمرين (٧ − ٣)

(١) جد قيمة (−١ + √٣ ت)^{٨} في صورة أ + ب ت

(٢) إذا كان ع = جا °١٠٥ + ت جتا °٧٥ جد الصورة القطبية للعدد ع ، ثم جد قيمة ع^{٢} .

(٣) جد قيمة $\dfrac{(−١ + √٣\ ت)^{٣}}{٢}$

(٤) جد قيمة $\left[\dfrac{√١ + ٣\ ت}{√١ − ٣\ ت}\right]^{١٠}$ في الصورة أ + ب ت

(٥) احسب بدلالة جتا هـ ، جا هـ وقواهما كلاً من :

جتا ٤ هـ ، جا ٤ هـ

(٦) برهن أن :

$$\left[\frac{١ + ت \text{ ظا } هـ}{١ - ت \text{ ظا } هـ}\right]^{ن} = \text{جتا } ٢ ن هـ + ت \text{ جا } ٢ ن هـ$$

(٧ – ٤) جذور الأعداد المركبة :

إذا كان ع عدداً حقيقياً موجباً ، فإنه يوجد عددان حقيقيان جـ = $\pm \sqrt{ع}$ يحقق كل منهما المعادلة $جـ^{٢}$ = ع ويسمى $\pm \sqrt{ع}$ جذري العدد ع .

وإذا كان ع = صفر له جذراً واحداً فإن جـ = صفر .

وإذا كان ع عدداً حقيقياً سالباً مثل ع = − أ ، أ > ٠ فإن له جذريين تخيليين هما $\pm \sqrt{-أ} = \pm \sqrt{أ}$ ت .

أما إذا كان ع عدداً مركباً على الصورة أ + ب ت فإن له جذرين تربيعين على الصورة جـ = س + ص ت ويحقق كل منهما المعادلة $جـ^{٢}$ = ع.

أو $(س + ص ت)^{٢}$ = أ + ب ت .

والأمثلة التالية توضح طريقة إيجاد الجذور التربيعية للأعداد المركبة .

مثال (١) :

جد الجذرين التربيعيين للعدد −٣٦

الحل :

$جـ^{٢} = -٣٦ \Leftarrow جـ = \pm \sqrt{-٣٦} = \pm ٦$ ت

∴ الجذران هما $\pm$ ٦ ت

مثال (٢) :

جد الجذرين التربيعيين للعدد ع = −٥ + ١٢ ت

الحل :

$(س + ص ت)^{٢} = -٥ + ١٢$ ت

$س^{٢} - ص^{٢} + ٢$ س ص ت $= -٥ + ١٢$ ت

وبتطبيق تساوى الأعداد نجد أن :

$س^{٢} - ص^{٢} = -٥$ ...... (١)

٢ س ص = ١٢ ...... (٢)

وبتعويض ص = $\frac{٦}{س}$ من المعادلة (٢) في المعادلة (١) ينتج

$$س^{٢} - \frac{٣٦}{س^{٢}} = -٥$$

$$س^{٤} - ٣٦ = -٥\ س^{٢}$$
$$س^{٤} + ٥\ س^{٢} - ٣٦ = ٠$$
$$(س^{٢} - ٤)\ (س^{٢} + ٩) = ٠$$

لكن س^{٢} + ٩ = ٠ لا يوجد حل لهذه المعادلة لأن س عدد حقيقي .

$$\therefore س^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٢$$

فإذا كان س = ٢ فإن ص = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

فإذا كان س = −٢ فإن ص = $\frac{٦}{-٢}$ = −٣

∴ جذرا العدد −٥ + ١٢ ت هما
٢ + ٣ ت ، −٢ − ٣ ت .

لندرس الآن كيفية إيجاد الجذور النونية للعدد المركب ع = ر [جتا هـ + ت جا هـ] ، ولنفرض أنها ع$_{٠}$ ، ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ،........ ، ع$_{ن-١}$ حيث :

ع$_{ك}$ = ر$_{ك}$ [جتا هـ$_{ك}$ + ت جا هـ$_{ك}$]
ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ .... ن − ١ .
لنبدأ بـــ ع$_{٠}$. ع$_{٠}$ تحقق ع$_{٠}^{ن}$ = ع أي أن :
ر$_{٠}^{ن}$ [جتا ن هـ$_{٠}$ + ت جا ن هـ$_{٠}$] = ر [جتا هـ + ت جا هـ]
أي أن :
[ر$_{٠}^{ن}$ ، ن هـ$_{٠}$] = [ر ، هـ]

$\therefore$ $ر_{.} = ر^{\frac{١}{ن}}$ ، $هـ_{.} = \frac{هـ}{ن}$. عليه فإن :

$$ع_{٠} = ر^{\frac{١}{ن}} \left[\text{جتا } \frac{هـ}{ن} + \text{ت جا } \frac{هـ}{ن} \right]$$

لإيجاد $ع_{١}$ نأخذ ع = ر [جتا (هـ + ٢π) + ت جا (هـ + ٢π)]

أو $ر_{١}^{ن}$ ٠ [جتا ن $هـ_{١}$ + ت جا ن $هـ_{١}$] = ر [جتا (هـ + ٢π) +ت جا (هـ + ٢π)]

أو [$ر_{١}^{ن}$ ، ن$هـ_{١}$] = [ر ، هـ + ٢π]

$\therefore$ $ر_{١} = ر^{\frac{١}{ن}}$ ، $هـ_{١} = \frac{هـ + ٢\pi}{ن}$. عليه فإن :

$$ر_{١} = ر^{\frac{١}{ن}} \left[\text{جتا } \frac{هـ + ٢\pi}{ن} + \text{ت جا } \frac{هـ + ٢\pi}{ن} \right]$$

أما بالنسبة لـــ $ع_{٢}$ وبأخذ ع = ر [جتا (هـ + ٢ × ٢π) + ت جا (هـ + ٢ × ٢π)] ، وبإتباع نفس الخطوات السابقة نحصل على :

$$\therefore ع_{٢} = ر^{\frac{١}{ن}} \left[\text{جتا } \frac{هـ + ٢ \times ٢\pi}{ن} + \text{ت جا } \frac{هـ + ٢ \times ٢\pi}{ن} \right]$$

وبصورة عامة :

$$ع_{ك} = ر^{\frac{١}{ن}} \left[\text{جتا } \frac{هـ + ك \times ٢\pi}{ن} + \text{ت جا } \frac{هـ + ك \times ٢\pi}{ن} \right]$$

ك = ٠ ، ١ ، ٢ ، .... ، ن – ١ .

تجدر الإشارة هنا إلى أنه ليس هنالك أكثر من ن جذر لـــ ع ، حتى لو استمررنا في زيادة ك إلى ما بعد ن – ١ ، فمثلاً إذا كان ك = ن فإن :

$$ع_ن = ر^{\frac{1}{ن}} \left[جتا \frac{هـ + ٢ن\pi}{ن} + ت\ جا \frac{هـ + ٢ن\pi}{ن} \right]$$

$$= ر^{\frac{1}{ن}} \left[جتا \left(\frac{هـ}{ن} + ٢\pi \right) + ت\ جا \left(\frac{هـ}{ن} + ٢\pi \right) \right] \quad ..\ (٢)$$

$$= ر^{\frac{1}{ن}} \left[جتا \frac{هـ}{ن} + ت\ جا \frac{هـ}{ن} \right] = ع.$$

وبالمثل :

$ع_{ن+١} = ع_١$ وهكذا .

مثال (٣) :

جد الجذرين التربيعين للعدد ت

الحل :

$$ت = [\ ١ ،\ \frac{\pi}{٢}\ ] = ١\ (جتا \frac{\pi}{٢} + ت\ جا \frac{\pi}{٢})$$

$$\therefore \sqrt{ت} = جتا \frac{\frac{\pi}{٢} + ٢ك\pi}{٢} + ت\ جا \frac{\frac{\pi}{٢} + ٢ك\pi}{٢}$$

وبوضع ك = ٠ ثم ك = ١ نجد أن الجذرين هما :

$$جتا \frac{\pi}{٤} + ت\ جا \frac{\pi}{٤} \quad ،\quad جتا \frac{٥\pi}{٤} + ت\ جا \frac{٥\pi}{٤}$$

أي :

$$\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\ ت \quad ،\quad - \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\ ت$$

مثال (٤) :

جد الجذور التكعيبية للعدد $ع = \frac{٨\sqrt{٢}}{١ - ت}$

الحل :

$$\frac{٨\sqrt{٢}}{١ - ت} = \frac{٨\sqrt{٢}\,(١ + ت)}{(١ - ت)\,(١ + ت)} = \frac{٨\sqrt{٢}\,(١ + ت)}{٢}$$

$$= ٤\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٢}\,ت$$

$$\therefore \text{ر} = \sqrt{٣٢ + ٣٢} = \sqrt{٦٤} = ٨$$

$$\text{أ} = ٤\sqrt{٢} \quad ، \quad \text{ب} = ٤\sqrt{٢}\,\text{ت} \Leftarrow \text{ظاهـ} = ١$$

$$\therefore \text{هـ} = ٤٥^\circ$$

$$\text{ع} = ٨ \left(\text{جتا } ٤٥^\circ + \text{ت جا } ٤٥^\circ\right)$$

$$\therefore \text{ع}^{\frac{١}{٣}} = ٨^{\frac{١}{٣}} \left(\text{جتا } \frac{٤٥^\circ + ٣٦٠^\circ\text{ك}}{٣} + \text{ت جا } \frac{٤٥^\circ + ٣٦٠^\circ\text{ك}}{٣}\right)$$

للمعادلة ثلاثة جذور $ع_٠$ ، $ع_١$ ، $ع_٢$ تنتج بتعويض ك = ٠ ، ١ ، ٢

$$\text{ع}_٠ = ٢ \left(\text{جتا } ١٥^\circ + \text{ت جا } ١٥^\circ\right)$$

$$\text{ع}_١ = ٢ \left(\text{جتا } \frac{٤٥^\circ + ٣٦٠^\circ}{٣} + \text{ت جا } \frac{٤٥^\circ + ٣٦٠^\circ}{٣}\right)$$

$$= ٢ \left(\text{جتا } ١٣٥^\circ + \text{ت جا } ١٣٥^\circ\right)$$

$$\text{ع}_٢ = ٢ \left(\text{جتا } \frac{٤٥^\circ + ٧٢٠^\circ}{٣} + \text{ت جا } \frac{٤٥^\circ + ٧٢٠^\circ}{٣}\right)$$

$$= ٢ \left(\text{جتا } ٢٥٥^\circ + \text{ت جا } ٢٥٥^\circ\right)$$

∴ جذور المعادلة هي :

٢ (جتا ١٥° + ت جا ١٥°) ، ٢ (جتا ١٣٥° + ت جا ١٣٥°) ،
٢ (جتا ٢٥٥° + ت جا ٢٥٥°)

مثال (٥) :

جد جذور المعادلة : ع^{٤} + ت ع = ٠

الحل :

ع^{٤} + ت ع = ٠ ∴ ع (ع^{٣} + ت) = ٠

أما ع = ٠ وهو احد الجذور أو ع^{٣} = − ت

∴ الجذور الأخرى هي الجذور التكعيبية للعدد − ت

∴ في العدد − ت ، أ = ٠ ، ب = − ١ ، هـ = ٢٧٠°

∴ع^{٣} = جتا ٢٧٠° + ت جا ٢٧٠°

$$\Leftarrow \text{ع}_{\text{ك}} = \left[\text{جتا}\,(٢٧٠° + ٣٦٠°\,\text{ك}) + \text{ت جا}\,(٢٧٠° + ٣٦٠°\,\text{ك})\right]^{\frac{١}{٣}}$$

$$= \text{جتا}\,\frac{٢٧٠° + ٣٦٠°\,\text{ك}}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٢٧٠° + ٣٦٠°\,\text{ك}}{٣}$$

بوضع ك = ٠

ع$_{٠}$ = جتا ٩٠° + ت جا ٩٠° = ت

بوضع ك = ١ ، $\text{ع}_{١} = \text{جتا}\,\frac{٢٧٠° + ٣٦٠°}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٢٧٠° + ٣٦٠°}{٣}$

= جتا ٢١٠° + ت جا ٢١٠°

$$= -\frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{ت}$$

وبوضع ك = ٢

$$\text{ع}_{٢} = \text{جتا}\,\frac{٢٧٠° + ٧٢٠°}{٣} + \text{ت جا}\,\frac{٢٧٠° + ٧٢٠°}{٣}$$

= جتا ٣٣٠° + ت جا ٣٣٠°

$$= \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢}\,\text{ت}$$

∴ جذور المعادلة هي :

$$\text{٠} \text{ ، } \text{ت} \text{ ، } \frac{-\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت} \text{ ، } \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{ت}$$

تمرين (٧ − ٤)

(١) جد الجذور التربيعية للأعداد المركبة التالية :

(أ) $\dfrac{\text{١} - \text{ت}}{\sqrt{\text{٢}}}$ (ب) $\text{٥} - \text{١٢ ت}$ (جـ) $\text{٨} + \text{٤}\sqrt{\text{٥}}\ \text{ت}$

(د) $\sqrt{\text{٣}} + \text{ت}$ (هـ) $\sqrt{\text{٣}} + \text{٣ ت}$

(٢) احسب الجذور التكعيبية للعدد ت .

(٣) جد الجذور التكعيبية للعدد − ٢ − ٢ ت .

(٤) جد كلاً من الجذور التالية ومثلها بيانياً :

(أ) $(-\text{١} + \text{ت})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}$ (ب) $(-\text{٢}\sqrt{\text{٣}} - \text{٢ ت})^{\frac{\text{١}}{\text{٤}}}$

(٥) احسب قيمتي $\text{ع} = (-\text{٢} + \text{٢}\sqrt{\text{٣}}\ \text{ت})^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$

(٦) في كل حالة جد جذور الأعداد المركبة المعطاة :

(أ) $\text{٨}^{\frac{\text{١}}{\text{٦}}}$ (ب) $(-\text{١})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}$ (جـ) $(\text{٢ ت})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$

(٧) حل المعادلة $\text{ع}^{\text{٥}} + \text{ت} = \text{٠}$

(٨) جد الجذور الثلاثة للمعادلة :

$(\text{١} - \text{ت})\,\text{ع}^{\text{٣}} = \text{٨} + \text{٨ ت}$

(٩) جد جذور المعادلة : $\text{ع}^{٣} = \frac{\text{١ − ت}}{\text{١ + ت}}$

(١٠) إذا كان $\text{ع}^{٥} = \sqrt{٢} + \sqrt{٦}\,\text{ت}$ جد قيم ع الخمسة بالصورة القطبية .

(٧ – ٥) حل معادلات الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد المركبة:

عرفنا فيما سبق أن لمعادلة الدرجة الثانية : $\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} = ٠$ حلين مختلفين في مجموعة الأعداد الحقيقية ، أو حلاً مضاعفاً يتساوى فيه الجذران ، أو لا يكون لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية وذلك حسب قيمة ($\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ جـ}$) موجباً أو صفراً أو سالباً إما إذا أردنا أن نحل المعادلة من الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد المركبة فإننا نلاحظ أنها قابلة للحل دائماً ؛ لأنه يمكن في هذه المجموعة إيجاد قيمه الجذر التربيعي للأعداد الموجبة والسالبة على السواء .

مثال (١) :

ليكن لدينا المعادلة :

$\text{ع}^{٢} - ٦\text{ع} + ١٣ = ٠$

فإن حلها مستخدمين القانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية .

$$\text{ع} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ جـ}}}{٢\text{أ}}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{-(-٦) \pm \sqrt{٣٦ - ٤ \times ١ \times ١٣}}{٢}$$

$$= \frac{٦ \pm \sqrt{-١٦}}{٢}$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{٦ \pm ٤\,\text{ت}}{٢} = ٣ \pm ٢\,\text{ت}$$

وهما عددان مركبان مترافقان .

من المثال السابق نلاحظ أن حلى المعادلة $أ\,ع^{٢} + ب\,ع + جـ = ٠$ والتي معاملاتها أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية هما عددان مركبان مترافقان عندما يكون المميز سالباً .

ويمكن أن نخلص إلى أنّ لمعادلة الدرجة الثانية ذات المعاملات الحقيقية جذرين حقيقيين مختلفين إذا كان المميز موجباً ، وجذرين مركبين مترافقين إذا كان المميز سالباً ، وجذرين متساويين إذا كان المميز صفراً .

مثال (٢) :

حل المعادلة :

$ع^{٣} + ٨ = ٠$

الحل :

$ع^{٣} + ٨ = ٠ \Leftarrow (ع + ٢)(ع^{٢} - ٢\,ع + ٤) = ٠$

∴ أما $ع + ٢ = ٠$ أي $ع = -٢$ وهذا أحد الجذور

أو $ع^{٢} - ٢\,ع + ٤ = ٠$

$$\therefore ع = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times ٤}}{٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{-١٢}}{٢}$$

$$= ١ \pm \sqrt{٣}\,ت$$

∴ جذور المعادلة هي :

-٢ ، $١ + \sqrt{٣}\,ت$ ، $١ - \sqrt{٣}\,ت$

مثال (٣) :

حل المعادلة :

$ع^{٢} + (٢ت - ٣)ع + (٥ - ت) = ٠$

الحل :

نلاحظ أن : $أ = ١$ ، $ب = ٢ت - ٣$ ، $جـ = ٥ - ت$

$$\therefore ع = \frac{-(٢ت - ٣) \pm \sqrt{(٢ت - ٣)^{٢} - ٤ \times ١ (٥ - ت)}}{٢}$$

$$= \frac{(٣ - ٢ت) \pm \sqrt{-١٥ - ٨ت}}{٢}$$

ولايجاد $\sqrt{-١٥ - ٨ت}$ نفرض أن :

$(س + ص ت)^{٢} = -١٥ - ٨ت$

ومنه $س^{٢} - ص^{٢} = -١٥$

$٢ س ص = -٨$

$$\therefore ص = \frac{-٤}{س}$$

$$\therefore س^{٢} - \frac{١٦}{س^{٢}} = -١٥$$

$س^{٤} - ١٦ = -١٥ س^{٢} \Leftarrow س^{٤} + ١٥ س^{٢} - ١٦ = ٠$

$\Leftarrow (س^{٢} + ١٦)(س^{٢} - ١) = ٠$

$\Leftarrow س^{٢} - ١ = ٠ \Leftarrow س = \pm ١$

$\therefore ص = \mp ٤$ (إشارة س تخالف إشارة ص لأن ٢ س ص سالباً)

$\therefore$ الجذران التربيعيان للمقدار $-١٥ - ٨ت$ هما $\pm (١ - ٤ت)$ ومنه

$$ع = \frac{(٣ - ٢ ت) \pm (١ - ٤ ت)}{٢}$$

ع = ٢ – ٣ ت أو ع = ١ + ت

لاحظ أن الجذرين غير مترافقين ؛ لأن المعادلة التربيعية معاملاتها غير حقيقية.

مثال (٤) :

ما المعادلة التربيعية ذات المعامـــلات الحقيقيـــة والتي أحد جذريها ٣ + ٢ ت؟

الحل :

بما أن المعادلة تربيعية ذات معاملات حقيقية و ٣ + ٢ ت أحد جذريها

∴ ٣ – ٢ ت الجذر الأخر .

نفرض أن المعادلة هي ع٢ + ب ع + جـ = ٠

∴ ب = – مجموع الجذرين = – (٣ + ٢ ت + ٣ – ٢ ت) = –٦

جـ = حاصل ضرب الجذرين = (٣ + ٢ ت) (٣ – ٢ ت) = ٩ + ٤ = ١٣

∴ المعادلة = ع٢ – ٦ ع + ١٣ = ٠

تمرين (٧ – ٥)

(١) حل المعادلات التالية :

(أ) ٤ $ع^{٢}$ – ١٢ ع + ١٣ = ٠

(ب) $ع^{٢}$ – ٤ ع + ٧ = ٠

(جـ) $ع^{٢}$ – (٥ + ٧ ت) ع + (-٦ + ١٧ ت) = ٠

(د) ٤$ع^{٢}$ + ٢٥ = ٠

(هـ) $ع^{٢}$ – ٢ ت ع + ٣ = ٠

(٢) جـد بقية جذور المعادلـة $ع^{٤}$ + ٤ $ع^{٢}$ + ١٦ = ٠ علمـاً بأن : ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت جذراً لها .

(٣) ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها هو :

(أ) –ت (ب) ٥ + ت (جـ) $\frac{\sqrt{٣} - ٤ ت}{٥}$

(د) ٢ – $\sqrt{٣}$ ت

(٤) جد مجموع وحاصل ضرب جذري المعادلة .

(١ + ٤ ت) $ع^{٢}$ + (٥ – ٣ ت) ع + (٨ – ٢ ت) = ٠

(٥) تحقق أن ٣ ت جذراً للمعادلة : ٣ $ع^{٣}$ + ٧ $ع^{٢}$ + ٢٧ ع + ٦٣ = ٠ثم جد باقي الجذور .

(٧ – ٦) الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

سبق أن عرفنا أنه لأي عدد حقيقي أ يوجد جذر تكعيبي حقيقي واحد يحقق المعادلة $ع^{٣}$ = أ ويكتب على الصورة $\sqrt[٣]{أ}$. أما في مجموعة الأعداد المركبة فسنجد أن هناك ثلاثة جذور تكعيبية للعدد الحقيقي .

وسنتناول أولاً الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أي حلـول المعادلـة $ع^{٣}$ = ١ أو $ع^{٣}$ – ١ = ٠ .

وبتحليل الطرف الأيمن نحصل على :

(ع – ١) ($ع^{٢}$ + ع + ١) = ٠ فيكون :

إما ع – ١ = ٠ ومنها ع = ١

أو $ع^{٢}$ + ع + ١ = ٠

ومنها $ع = \frac{-١ \pm \sqrt{-٣}}{٢} = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$

∴ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هي :

$$١ \ ، \ -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت \ ، \ -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}ت$$

تلاحظ أن أحد الجذور حقيقي والآخرين عددان مركبان مترافقان .

فإذا رمزنا لأحد الجذرين المركبين بالرمز ω (أوميقا) فإن الجذر الآخر يكون $\omega^{٢}$ إذ أن مربع أي منها يساوى الآخر ويمكنك التحقق من ذلك ولذلك يمكن كتابة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح على الصورة :

$١ ، \omega ، \omega^{٢}$ وهذه الجذور تحقق الخاصيتين :

(١) $١ + \omega + \omega^{٢} = ٠$

(٢) $\omega^{٣} = ١$

وبصورة عامة :

إذا كان أ عدداً حقيقياً فإن الجذور التكعيبية للعدد أ هي :

$$\sqrt[٣]{أ} \ ، \ \sqrt[٣]{أ}\,\omega \ ، \ \sqrt[٣]{أ}\,\omega^{٢}$$

ويمكنك التحقق من أن كل جذر من هذه الجذور هو حل للمعادلة $ع^{٣} = أ$.

مثال (١) : جد الجذور التكعيبية للعددين ٨ ، −١

الحل :

بما أن $\sqrt[٣]{٨} = ٢$

فإن الجذور التكعيبية للعدد ٨ هي :

$٢ ، ٢\omega ، ٢\omega^{٢}$

وبما أن $\sqrt[٣]{-١} = -١$ فإن الجذور التكعيبية للعدد −١ هي :

$-١ ، -\omega ، -\omega^{٢}$

مثال (٢) :

أحسب $\omega^{٣٢}$ ، $\omega^{-٤١}$

الحل :

$$\omega^{٣٢} = \omega^{٣٠} \cdot \omega^{٢} = (\omega^{٣})^{١٠}\, \omega^{٢} = ١^{١٠}\, \omega^{٢} = \omega^{٢}$$

$$\omega^{-٤١} = \omega^{-٤٢} \cdot \omega = (\omega^{٣})^{-١٤}\, \omega = ١^{-١٤} \cdot \omega = \omega$$

وبصورة عامة :

$$\omega^{٣ن + ر} = \omega^{ر}$$

حيث ن عدد صحيح ، ر = ٠ ، ١ ، ٢

مثال (٣) :

اثبت أن :

$$(١ - \omega^{٢} + \omega^{٤})\,(١ + \omega^{٢} - \omega^{٤}) = ٤$$

الحل :

الطرف الأيمن :

$$(١ - \omega^{٢} + \omega^{٤})\,(١ + \omega^{٢} - \omega^{٤})$$

$$= (١ - \omega^{٢} + \omega)\,(١ + \omega^{٢} - \omega) \quad (\text{لأن } \omega^{٤} = \omega)$$

$$= (١ + \omega - \omega^{٢})\,(١ + \omega^{٢} - \omega)$$

$$= (-\omega^{٢} - \omega^{٢})\,(-\omega - \omega)$$

لأن $١ + \omega = -\omega^{٢}$ ، $١ + \omega^{٢} = -\omega$

$$= (-٢\omega^{٢})\,(-٢\omega) = ٤\omega^{٣} = ٤ \times ١$$

= ٤ الطرف الأيسر

تمرين (٧ – ٦)

(١) احسب الجذور التكعيبية للأعداد التالية :

أ. ٢٧ ب. ١٢٥ ج. $-\frac{١}{٨}$

(٢) اكتب المقادير التالية في أبسط صورة :

أ. $\omega^{٥٢}$ ب. $\omega^{-١٤}$ ج. $\left(\frac{١}{١ + \omega}\right)^{١٢}$

(٣) اثبت أن :

أ. $(١ + \omega)(١ + \omega^{٢}) = ١$

ب. $(١ + \omega)^{٣} = -١$

ج. $(١ + \omega^{٢})^{-٤} = \omega^{٢}$

(٤) احسب مجموع :

$$١ + \omega + \omega^{٢} + \ldots\ldots + \omega^{٦٤}$$

(٥) جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية والتي أحد جذريها ω.

(٦) احسب قيمة المقدار :

$$(١ + \omega + \omega^{٤})(١ + \omega^{٢} + \omega^{٥})$$

(٧) جد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح مستخدماً الصورة القطبية وعينها على المستوى المركب .

(٨) جد قيمة :

$$(٢\omega^{٢} + ٥\omega + ٢)^{٣}$$

(٩) برهن أن :

أ. $(١ + \omega) (١ + \frac{١}{\omega}) (١ + \frac{١}{\omega^{٢}}) (١ + \omega^{٢}) = ١$

ب. $(١ - \omega) (١ - \omega^{٢}) (١ + \omega^{٣}) = ٦$

تمرين عام (٧ – ٧)

(١) باستخدام نظرية دي موفير احسب :

$$(- \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} ت)^{١٦}$$

(٢) إذا كان $ع_{١} = -١ + ت$ ، جد المعادلة التي جذراها $ع_{١}$ ، $\frac{١}{ع_{١}}$

(٣) جد جذري المعادلة $ع^{٦} + ت =$ صفر حيث ع عدد مركب .

(٤) اكتب كلاً من العددين التاليين في الصورة القطبية :

$ع_{١} = ١ + \sqrt{٣} ت$ ، $ع_{٢} = (١ + \sqrt{٣} ت)^{١٨}$

(٥) ليكن أ = جتا هـ + ت جا هـ . اكتب الجذور التكعيبية للعدد أ وبين أن مجموعها يساوى الصفر .

(٦) جد قيمة كل من الأعداد الحقيقية س ، ص التي تحقق المعادلة :

$$\left[\frac{١ + ت}{١ - ت} \right]^{٢} + \frac{١}{س + ص ت} = ١ + ت$$

(٧) إذا كان $أ - ب ت = \frac{٥ + ت}{٣ - ت}$ ، جد قيمة كل من أ ، ب

(٨) جد الجذر التربيعى للمقدار $٢ + ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$

(٩) ضع المقدار المركب $\dfrac{\sqrt{٣} - \sqrt{٢}\,\text{ت}}{٢\sqrt{٣} - \sqrt{٢}\,\text{ت}}$ في الصورة أ + ب ت

(١٠) جد $\sqrt{٤ - ٣\,\text{ت}}$

(١١) أثبت أن :

أ. $(١ + \text{جتا هـ} + \text{ت جا هـ})^{\text{ن}} + (١ + \text{جتا هـ} - \text{ت جا هـ})^{\text{ن}}$

$= ٢^{\text{ن} + ١}\,\text{جتا}^{\text{ن} + ١}\,\dfrac{\text{هـ}}{٢}$

ب. $\text{أ}^{\text{ن}} + \text{ب}^{\text{ن}} = ٢^{\text{ن} + ١}\,\text{جتا}\,\dfrac{\text{ن}\,\pi}{٣}$

حيث أ ، ب جذرا المعادلة $\text{ع}^{٢} - ٢\text{ع} + ٤ = \text{صفر}$